



Titre: Stabilité des ponts ferroviaires à tablier inférieur
Title:

Auteur: Olivier Joly
Author:

Date: 1997

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Joly, O. (1997). Stabilité des ponts ferroviaires à tablier inférieur [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/6672/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/6672/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:**
Advisors:

Programme: Unspecified
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

**STABILITÉ DES PONTS FERROVIAIRES
À TABLIER INFÉRIEUR**

OLIVIER JOLY

DÉPARTEMENT DES GÉNIES CIVIL, GÉOLOGIQUE ET DES MINES
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE CIVIL)

JUILLET 1997



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-33144-X

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

STABILITÉ DES PONTS FERROVIAIRES

À TABLIER INFÉRIEUR

présenté par : JOLY Olivier

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. LÉGER Pierre, Ph.D., président

M. MASSICOTTE Bruno, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. TREMBLAY Robert, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. NOWAK George, ing., MBA, membre

REMERCIEMENTS

L'auteur tient à souligner sa gratitude envers tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la rédaction de ce mémoire. Il remercie particulièrement ses directeurs de recherche, MM. Bruno Massicotte et Robert Tremblay, qui lui ont toujours donné tout le soutien et l'appui possible et nécessaire à l'aboutissement de ce mémoire.

L'auteur remercie aussi Danielle Jacques sans qui la dérivation des équations du chapitre 6 aurait été impossible et Philippe Legault avec qui il a débuté ce projet de recherche.

Enfin, il remercie le fonds FCAR pour son soutien financier.

RÉSUMÉ

Pour des raisons de dégagement sous l'ouvrage, les poutres principales des ponts ferroviaires à tablier inférieur sont surélevées et leur semelle supérieure n'est pas retenue latéralement de façon directe. Le déversement de la poutre est prévenu par l'utilisation des entretoises du pont qui, reliées à la poutre maîtresse par des goussets, empêchent la rotation de cette dernière.

Le déversement est aussi influencé par le tablier du pont qui, par un effet de diaphragme horizontal, vient bloquer le déplacement latéral de la poutre au niveau du tablier. Le déversement est également influencé par la déformation de la section de l'âme que l'on appellera la distorsion.

Tous ces phénomènes rendent très complexe le calcul du moment de déversement de la poutre à laquelle on ne peut plus appliquer les équations classiques du déversement.

Ce problème a été étudié par plusieurs auteurs que l'on peut regrouper en deux écoles de pensée. La première ne considère que la partie comprimée de la poutre et fait ainsi l'analyse d'un poteau sur appuis élastiques. La deuxième considère une poutre à laquelle vient se rattacher un ressort travaillant en rotation.

Aucune des méthodes proposées par ces auteurs ne permet d'inclure de façon satisfaisante l'ensemble des paramètres régissant le problème.

Pour étudier l'effet de chaque composante du pont sur le déversement des poutres maîtresses et pour bien saisir tous les phénomènes en jeu, un modèle d'éléments finis a été développé pour un pont réel typique. La stabilité de ce pont a été étudiée en variant les propriétés des diverses composantes.

Une fois la fonction de chaque composante bien établie, une méthode de calcul du moment de déversement est proposée. Cette méthode, basée sur une approche énergétique, considère la poutre non pas dans son ensemble mais décompose celle-ci en trois parties: l'âme et les deux semelles. Un polynôme de degré allant jusqu'à quatre est utilisé pour décrire la déformée de l'âme lors du déversement. La méthode permet d'inclure l'effet du tablier de même que la distorsion de l'âme pour une poutre unisymétrique soumise à un moment constant.

Un processus est ensuite proposé pour convertir les raidisseurs de la poutre en une épaisseur d'âme équivalente afin d'inclure leur effet stabilisateur dans la méthode d'évaluation du moment de déversement.

Finalement, la méthode proposée est comparée à des analyses par éléments finis et à des méthodes proposées par différents auteurs.

ABSTRACT

Through plate girder bridges are used when clearance under the bridge is limited. They are characterized by the use of girders that do not have direct lateral bracing at the top flange. Lateral-torsional buckling is therefore prevented by the floorbeams, which restrain, through the connections between the floorbeams and the main girders, the rotation of the main girder.

Lateral-torsional buckling of the main girders is influenced by the deck, which acts as an horizontal diaphragm. This diaphragm prevents the lateral displacement of the girder at the deck level. Lateral-torsional buckling is also influenced by cross-section distortion of the girder.

Calculation of the buckling load is therefore a very complex process in which the use of classical formulas is impossible.

The determination of that buckling load has been studied by numerous authors that can be divided in two groups. The first group includes those who only consider the top flange portion of the girder. This consideration leads to the study of a column on elastic foundation. The second class of authors are those who view the girder as a single element to which a torsional spring is attached.

None of the above methods are satisfactory in incorporating all the facets of the problem.

To understand the influence of each part of the bridge on the lateral-torsional buckling of the main girders, a finite element model of a typical bridge has been created. Parametric analyses have been performed by varying the properties of the different parts of the bridge.

Once the role of each part is known, a procedure for the calculation of the buckling load is proposed. This procedure, based on an energy approach, takes into account the whole girder as a sum of three parts: the web, the top flange and the bottom flange. A fourth-degree polynomial function or a lesser degree polynomial function is used to describe the deformation of the web at the buckling point. This procedure includes the horizontal diaphragm effect of the deck as well as web distortion. It is developed for a unisymmetrical I-beam under a uniform moment

A method to transform stiffeners into an equivalent web thickness is also proposed for using the proposed procedure.

Finally, the results obtained with proposed procedure are compared to the results obtained from finite element computation and from procedures derived by previous researches.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES TABLEAUX.....	xvi
LISTE DES FIGURES	xix
LISTE DES SYMBOLES.....	xxvi
LISTE DES ANNEXES	xxxiii
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION	
1.1 Classification des types de ponts.....	1
1.2 Nomenclature des principales composantes des ponts à tablier inférieur à âme pleine.	7
1.3 Norme applicable aux ponts ferroviaires	7
1.3.1 Charges de calcul.....	10
1.3.1.1 Poids propre	10

1.3.1.2 Charge vive.....	10
1.3.1.3 Autres charges	12
1.3.2 Résistance	14
1.3.3 Autres considérations de conception	18
1.4 Normes S6 et S16.1	21
1.5 Problématique	24
1.6 Objectifs	26
1.7 Portée du travail.....	28
 CHAPITRE 2 : ANALYSE CLASSIQUE DU DÉVERSEMENT	
2.1 Approche usuelle	29
2.1.1 Hypothèses de base	32
2.1.1.1 Distorsion de la section	32
2.1.1.2 Appuis latéraux.....	33
2.1.2 Autres conditions frontières et chargements	33
2.1.3 Formulation de Winter et Thürliman	34
2.1.3.1 Formulation de l'AREA	36
2.1.4 Formulation dans la norme S16.1.....	40
2.2 Modèle du poteau sur supports élastiques.....	40
2.2.1 Approche de Engesser	43
2.2.2 Approche de Timoshenko (fondation élastique)	46
2.2.3 Approche de Bleich (extrémités fixes).....	49

2.2.4 Comparaison des méthodes avec extrémités fixes	53
2.2.5 Approche de Timoshenko (charge parabolique)	54
2.2.6 Approche de Schweda	56
2.2.7 Approche de Ratzersdorfer	62
2.2.8 Approche de Lazard	64
2.3 Modèle de la poutre avec retenue de torsion.....	67
2.3.1 Approche de Taylor et Ojalvo	68
2.3.2 Approche de Yura	70
 CHAPITRE 3 : COMPORTEMENT ET COMPOSANTES STABILISATRICES	
3.1 Entretoises	74
3.1.1 Critères de dimensionnement des entretoises.....	74
3.1.2 Effet des entretoises sur la stabilité	77
3.2 Tablier	77
3.2.1 Critères de dimensionnement du tablier	77
3.2.2 Effet du tablier sur la stabilité.....	78
3.3 Assemblages poutre-entretoise	79
3.3.1 Critères de dimensionnement des assemblages.....	79
3.3.2 Effet des assemblages sur la stabilité	80
3.4 Goussets d'assemblage.....	80
3.4.1 Critères de dimensionnement des goussets	80
3.4.2 Effet des goussets sur la stabilité.....	83

3.5 Raidisseurs transversaux.....	84
3.5.1 Critères de dimensionnement des raidisseurs transversaux.....	84
3.5.2 Effet des raidisseurs transversaux sur la stabilité.....	85
3.6 Raidisseurs longitudinaux.....	85
3.6.1 Critères de dimensionnement des raidisseurs longitudinaux	85
3.6.2 Effet des raidisseurs longitudinaux sur la stabilité.....	86
3.7 Raidisseurs porteurs	86
3.7.1 Critères de dimensionnement des raidisseurs porteurs	86
3.7.2 Effet des raidisseurs porteurs sur la stabilité.....	87
3.8 Effet de la charge.....	87

CHAPITRE 4 : MODÉLISATION DU PONT TYPE

4.1 Introduction.....	89
4.2 Géométrie générale	90
4.3 Rigidité des assemblages poutre maîtresse-entretoises	92
4.3.1 Modèle de Chen et Lui	92
4.3.2 Vérification par éléments finis.....	94
4.4 Modélisation du pont type par éléments finis	96
4.4.1 Choix du logiciel.....	96
4.4.2 Éléments utilisés	97
4.4.3 Géométrie	98
4.4.4 Conditions frontières	99

4.4.4.1 Conditions aux appuis	100
4.4.4.2 Conditions frontières supplémentaires dues à la symétrie	100
4.4.5 Chargement appliqué au modèle	103

CHAPITRE 5 : ÉTUDE PARAMÉTRIQUE

5.1 Approche utilisée	105
5.2 Poutre classique	106
5.3 Effet du tablier	107
5.3.1 Conditions d'appui classiques	107
5.3.2 Conditions d'appui et chargement réels	110
5.4 Effet des entretoises et de l'assemblage poutre maîtresse-entretoise	114
5.5 Effet des raidisseurs longitudinaux	120
5.6 Effet des raidisseurs transversaux	123
5.7 Effet des goussets d'assemblage	127
5.8 Effet des retenues d'extrémité	129

CHAPITRE 6 : DÉVERSEMENT D'UNE POUTRE AVEC ÂME FLEXIBLE ET POINT DE ROTATION

6.1 Introduction	130
6.2 Poutres avec point de rotation fixe, avec ressort rotationnel et sans distorsion de l'âme	134
6.3 Poutres avec âme flexible	139

6.3.1 Définition des degrés de liberté	139
6.3.2 Énergie interne	141
6.3.3 Énergie des charges externes	142
6.3.4 Énergie potentielle totale	146
6.3.5 Résolution de l'équation d'énergie	147
6.3.6 Poutre avec âme infiniment rigide	150
6.3.7 Résultats numériques	151
6.4 Poutres avec point de rotation fixe et âme flexible	154
6.4.1 Poutre avec âme infiniment rigide	155
6.4.2 Résultats numériques	156
6.5 Poutres avec point de rotation fixe, ressort rotationnel et âme flexible	158
6.5.1 Poutre avec âme infiniment rigide	161
6.5.2 Résultats numériques	163
 CHAPITRE 7 : DÉVERSEMENT D'UNE POUTRE RAIDIE	
7.1 Raidisseurs de largeur constante	167
7.2 Raidisseurs droits d'un seul côté de l'âme	179
7.3 Raidisseurs de forme triangulaire	182
7.4 Comparaison avec la méthode de Bleich et la méthode de Yura	190
 CHAPITRE 8 : CONCLUSION	
8.1 Synthèse	194

8.1.1 Analyse classique du déversement.....	194
8.1.2 Comportement et composantes stabilisatrices.....	195
8.1.3 Modélisation du pont type utilisé et étude paramétrique.....	197
8.1.4 Déversement d'une poutre avec âme flexible et point de rotation fixe....	198
8.1.5 Déversement d'une poutre raidie	199
8.2 Utilisation de la méthode proposée.....	199
8.2.1 Transformation des raidisseurs transversaux.....	200
8.2.2 Détermination de la rigidité K_r	200
8.2.3 Calcul du moment de déversement élastique (M_{α}).....	201
8.2.4 Calcul du moment résistant.....	202
8.3 Travaux subséquents	202
BIBLIOGRAPHIE.....	204

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1 : Contraintes admissibles (AREA 1988)	15
Tableau 2.1 : Facteur K_1 en fonction de D	48
Tableau 2.2 : Valeur de Φ en fonction de $1/K$	52
Tableau 2.3 : Valeur de K_2 en fonction de D	55
Tableau 2.4 : Valeur de c en fonction de K pour $n=12$	59
Tableau 2.5 : Interpolation des tableaux de Schweda (treillis à portique vertical)	61
Tableau 2.6 : Rigidité des supports requise pour un poteau à extrémités fixes	63
Tableau 2.7 : Rigidité requise pour un poteau à extrémités élastiques ($K=1$)	64
Tableau 4.1 : Charges de calcul du pont type	91
Tableau 4.2 : Résultats du modèle de l'assemblage	96
Tableau 5.1 : Moment critique, poutre classique	107
Tableau 5.2 : Moment de déversement pour diverses rigidités des assemblages	117
Tableau 5.3 : Variation du moment de déversement pour une augmentation de la rigidité des assemblages	118
Tableau 6.1 : Moment de déversement selon l'équation 6.15 pour la poutre du pont-type sans raidisseurs ($a_{cg}=441$)	138
Tableau 6.2 : Moments de déversement pour diverses poutres à âme flexible	152

Tableau 6.3 : Moments de déversement pour la poutre du pont-type avec point de rotation fixe ($\alpha=881$)	157
Tableau 6.4 : Moment de déversement pour des poutres avec point de rotation imposé	158
Tableau 6.5 : Poutres à âmes infiniment rigides avec point de rotation imposé et ressort rotationnel	163
Tableau 6.6 : Poutres avec point de rotation fixe et âmes flexibles	163
Tableau 6.7 : Poutres avec point de rotation imposé et ressort rotationnel selon la méthode énergétique	165
Tableau 6.8 : Poutres avec point de rotation imposé et ressort rotationnel selon le logiciel BASP	165
Tableau 6.9 : Poutres avec point de rotation imposé et ressort rotationnel selon le logiciel ADINA	165
Tableau 7.1 : Effet des dimensions des raidisseurs	169
Tableau 7.2 : Moment de déversement ($\text{kN}\cdot\text{m}$) pour une variation de l'espacement et des dimensions des raidisseurs	170
Tableau 7.3 : Moment de déversement ($\text{kN}\cdot\text{m}$) pour la poutre type raidie (raideurs de 100×8 mm espacés de 1575 mm)	178
Tableau 7.4 : Moment de déversement ($\text{kN}\cdot\text{m}$) pour un profile WWF1200x263 raidi (raideurs de 100×4 mm espacés de 750 mm)	178

Tableau 7.5 : Moment de déversement (kN*m) pour la poutre type avec raidisseurs simples et raidisseurs doubles	180
Tableau 7.6 : Comparaison des moments de déversement obtenus par BASP et par la méthode énergétique via l'équation 7.7	187
Tableau 7.7 Comparaison des moments de déversement (kN*m) de la méthode proposée avec celle de Bleich et de Yura.....	191
Tableau B.1 : Étude de convergence sur une plaque comprimée	216
Tableau B.2 : Étude de convergence sur une plaque fléchie	220
Tableau B.3 : Moments critiques théoriques	225
Tableau B.4 : Étude de convergence : éléments à 16 noeuds pour l'âme.....	225
Tableau B.5 : Étude de convergence : éléments à 4 noeuds pour l'âme.....	226
Tableau B.6 : Étude de convergence, éléments utilisés dans les semelles.....	229
Tableau B.7 : Étude de convergence, phénomène de la distorsion.....	230

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Types de ponts ferroviaires.....	2
Figure 1.2 : Tablier inférieur et tablier supérieur	6
Figure 1.3 : Nomenclature des composantes d'un pont à tablier inférieur.....	7
Figure 1.4 : Chargement Cooper E80 et Cooper M356	11
Figure 1.5 : Axes de calcul d'inertie.....	17
Figure 1.6 : Dimensionnement des goussets d'assemblage.....	20
Figure 1.7 : Schéma de dégagement	21
Figure 1.8 : Modèles d'une poutre avec appuis latéraux élastiques.....	26
Figure 1.9 : Utilisation des courbes de calcul.....	27
Figure 2.1 : Déversement d'une poutre (analyse classique).....	30
Figure 2.2 : Courbe de calcul selon l'équation 2.20	38
Figure 2.3 : Flambement d'un poteau sur supports élastiques	42
Figure 2.4 : Utilisation des courbes de calcul.....	46
Figure 2.5 : Comparaison des résultats de Timoshenko et Engesser.....	49
Figure 2.6 : Variation de $CL/2P$ en fonction de $1/K$ pour différentes valeurs de n	51
Figure 2.7 : Comparaison des méthodes de Engesser, Bleich et Timoshenko pour un poteau à extrémités fixes	53

Figure 2.8 : Chargement parabolique et chargement continu par Timoshenko	55
Figure 2.9 : Modèle de Schweda	57
Figure 2.10 : Types de portiques	60
Figure 2.11 : Interpolation des tableaux de Schweda	61
Figure 2.12 : Poutre avec retenue de torsion	68
Figure 2.13 : Calcul de la rigidité d'une retenue torsionnelle	69
Figure 2.14 : Dimensions à utiliser dans l'équation 2.61	72
Figure 3.1 : Dimensionnement des entretoises	75
Figure 3.2: Effet du tablier sur la rotation des poutres maîtresses.....	79
Figure 3.3 : Dimensionnement des goussets d'assemblage	81
Figure 3.4 : Dimensions à utiliser dans les limites d'élancement.....	83
Figure 3.5 : Effet de la charge sur la configuration du pont.....	88
Figure 4.1 : Dimensions du pont type	91
Figure 4.2 : Détails de l'assemblage poutre maîtresse - entretoise.....	92
Figure 4.3 : Dimensions à utiliser dans la formule de Chen et Lui	93
Figure 4.4 : Modèle de l'assemblage	95
Figure 4.5 : Modèle du pont avec conditions de symétrie.....	98
Figure 4.6 : Modèle de l'assemblage poutre maîtresse-entretoise.....	99
Figure 4.7 : Section du pont avec conditions de symétrie.....	102
Figure 5.1 : Poutre avec effet de tablier et retenues latérales aux extrémités, vue isométrique.....	108

Figure 5.2 : Poutre avec effet de tablier et retenues latérales aux extrémités, vue en plan.....	108
Figure 5.3 : Poutre avec effet de tablier et retenues latérales aux extrémités, section....	109
Figure 5.4 : Poutre avec effet de tablier et retenues latérales aux extrémités, distorsion empêchée.....	110
Figure 5.5 : Poutre sans raidisseurs sous moment uniforme, vue isométrique	111
Figure 5.6 : Poutre sans raidisseurs sous moment uniforme, vue en plan	111
Figure 5.7 : Poutre sans raidisseurs sous moment uniforme, section.....	112
Figure 5.8 : Poutre avec effet de tablier sous charge constante, vue isométrique	113
Figure 5.9 : Poutre avec effet de tablier sous charge constante, vue en plan	113
Figure 5.10 : Poutre avec effet de tablier sous moment constant, section	113
Figure 5.11 : Moment de déversement pour diverses rigidités des assemblages	118
Figure 5.12 : Voilement local comme limite d'utilisation.....	121
Figure 5.13 : Poutre avec raidisseurs transversaux simples, vue isométrique	122
Figure 5.14 : Poutre avec raidisseurs transversaux simples, vue en plan	122
Figure 5.15 : Poutre avec raidisseurs transversaux simples, section.....	122
Figure 5.16 : Poutre avec raidisseurs transversaux simples et raidisseur longitudinal, vue isométrique.....	123
Figure 5.17 : Poutre avec raidisseurs transversaux simples et raidisseur longitudinal, vue en plan.....	124

Figure 5.18 : Poutre avec raidisseurs transversaux simples et raidisseur longitudinal, section	124
Figure 5.19 : Poutre avec raidisseurs transversaux simples et raidisseur longitudinal, assemblage faible	125
Figure 5.20 : Poutre avec raidisseurs transversaux simples et raidisseur longitudinal, assemblage fort	125
Figure 5.21 : Poutre avec raidisseurs transversaux doubles et raidisseur longitudinal, vue isométrique	126
Figure 5.22 : Poutre avec raidisseurs transversaux doubles et raidisseur longitudinal, vue en plan	127
Figure 5.23 : Poutre avec raidisseurs transversaux doubles et raidisseur longitudinal, section	127
Figure 5.24 : Poutre avec goussets d'assemblage et raidisseur longitudinal, vue isométrique	128
Figure 5.25 : Poutre avec goussets d'assemblage et raidisseur longitudinal, vue en plan.....	128
Figure 5.26 : Poutre avec goussets d'assemblage et raidisseur longitudinal, section	129
Figure 6.1 : Méthodes de calcul du moment de déversement.....	131
Figure 6.2 : Définition des degrés de liberté.....	139
Figure 6.3 : Imposition d'un point de rotation fixe.....	154

Figure 7.1 : Effet de l'augmentation de l'épaisseur de l'âme sur la poutre type ($a=h/3$; $\beta_{\text{ressort}} = 50 \text{ kN*mm/mm}$)	171
Figure 7.2 : Effet de la profondeur des raidisseurs sur la poutre type ($a=h/3$; $\beta_{\text{ressort}} = 50$ kN*mm/mm ; $t_s=8 \text{ mm}$, raidisseurs espacés de 1575 mm)	171
Figure 7.3 : Comparaison de l'effet de l'épaisseur équivalente exacte sur la poutre type ($a=h/3$; $K_r = 50 \text{ kN*mm/mm}$; raidisseurs : $t_s=8 \text{ mm}$, $s=1575 \text{ mm}$)	175
Figure 7.4 : Comparaison de l'effet de la profondeur des raidisseurs sur la poutre type ($a=h/3$; $K_r = 50 \text{ kN*mm/mm}$; raidisseurs : $t_s=8 \text{ mm}$, $s=1575 \text{ mm}$)	176
Figure 7.5 : Comparaison de l'effet de l'augmentation de l'épaisseur de l'âme sur la poutre type ($a=h/3$; $K_r = 50 \text{ kN*mm/mm}$).....	177
Figure 7.6 : Moment de déversement (kN*m) pour la poutre type avec raidisseurs simples et raidisseurs doubles	181
Figure 7.7 : Principe du calcul de l'épaisseur d'âme équivalente pour des raidisseurs triangulaires	183
Figure 7.8 : Raidisseur à inertie variable de géométrie simplifiée	185
Figure 7.9 : Configuration des raidisseurs utilisés au tableau 7.6	188
Figure 7.10 : Réduction de la portée des entretoises	190
 Figure A.1 : Chargement Cooper	 208
Figure A.2 : Locomotive de type Consolidation 2442 avec tender	209
Figure A.3 : Un exemple d'une locomotive de type Consolidation avec son tender	209

Figure A.4 : Évolution de la charge prescrite pour le calcul des structures	211
Figure B.1 : Plaque comprimée	214
Figure B.2 : Étude de convergence sur une plaque carrée comprimée	217
Figure B.3 : Plaque en flexion	219
Figure B.4 : Étude de convergence sur une plaque carrée fléchie	221
Figure B.5 : Poutre classique, vue isométrique	223
Figure B.6 : Poutre classique, vue en plan	223
Figure B.7 : Poutre classique, section	223
Figure B.8: Étude de convergence du maillage de l'âme	227
Figure C.1 : Élément sans noeud intermédiaire, charge triangulaire	231
Figure C.2 : Charges équivalentes pour une charge triangulaire, élément sans noeud intermédiaire	232
Figure C.3 : Élément sans noeud intermédiaire, charge constante	232
Figure C.4 : Charges équivalentes pour une charge triangulaire, élément sans noeud intermédiaire	233
Figure C.5 : Élément avec un noeud intermédiaire, charge triangulaire	234
Figure C.6 : Charges équivalentes pour une charge triangulaire, élément avec un noeud intermédiaire	235
Figure C.7 : Élément avec un noeud intermédiaire, charge constante	235
Figure C.8 : Charges équivalentes pour une charge constante, élément avec un noeud intermédiaire	236

Figure C.9 : Élément avec deux noeuds intermédiaires, charge triangulaire	237
Figure C.10 : Charges équivalentes pour une charge triangulaire, élément avec deux noeuds intermédiaires.....	238
Figure C.11 : Élément avec deux noeuds intermédiaires, charge constante.....	239
Figure C.12 : Charges équivalentes pour une charge constante, élément avec deux noeuds intermédiaires.....	240
Figure C.13 : Élément avec deux noeuds intermédiaires, charge triangulaire double.....	241
Figure C.14 : Charges équivalentes pour une charge triangulaire double, élément avec deux noeuds intermédiaires	242

LISTE DES SYMBOLES

Alphabet latin

a	Distance entre le centre de gravité de la poutre et le centre de gravité de la semelle inférieure
A	Amplitude
a_1	Longueur de la plaque
a_{cg}	Distance entre le centre de gravité de la poutre et l'axe de rotation
A_f	Aire de la plus petite des semelles
A_{fc}	Aire de la semelle comprimée
A_w	Aire de la section de l'âme
b	Largeur de la semelle
b_0	Largeur effective (figure 3.4)
b_1	Largeur de la plaque
b_1, b_2	Largeur des semelles supérieure et inférieure
$b_{i=1,2,3,4}$	Coefficient de la fonction u et u_{mr}
b_s	Largeur du raidisseur (figure 2.14)
b_{s1}	Profondeur du raidisseur (figure 7.8)
b_{s2}	Profondeur du raidisseur (figure 7.8)
c	Facteur de majoration de la rigidité des supports
$c_{i=1,2,3,4}$	Coefficient de la fonction u_{sup}
C	Rigidité des supports intermédiaires
C'	Module de fondation = C/L_n
C_0	Rigidité requise des supports intermédiaires pour modèle à extrémités rigides
C_{bb}	Facteur de chargement entre les supports
C_{bu}	Facteur de chargement de la poutre complète

C_e	Rigidité des supports d'extrémité (figure 2.9)
C_{eff}	Rigidité pour des supports absolument efficaces (équation 2.51)
C_{req}	Rigidité requise des supports
C_t	Facteur de position de la charge
C_w	Constante de gauchissement
D	Facteur de retenue latérale; Inertie de plaque (équation 6.28)
D	Inertie de plaque
d	Profondeur de la poutre
d_1	Distance entre le centre de gravité de la poutre et le centre de gravité de la semelle supérieure
d_2	Distance entre le centre de gravité de la poutre et le centre de gravité de la semelle inférieure
d_s	Profondeur de la cornière (figure 4.3)
D_p	Rigidité de la plaque (équation B.2)
d_i	Distance entre les ressorts (figure 4.6)
d_s	Distance entre les raidisseurs transversaux
E	Module d'élasticité (module d'Young)
E_t	Module tangent
F	Fonctionnelle
F_{cen}	Force centrifuge en pourcentage du chargement Cooper
f_{cr}	Contrainte de déversement
F_u	Contrainte de limite ultime
F_y	Contrainte de limite élastique
G	Module de cisaillement
g_1	Distance entre congé et assemblage (figure 4.3)
h	Profondeur de l'âme
h	Distance entre le centre de gravité des semelles (chapitre 6)
h^*	Distance entre le centre de gravité des semelles (chapitre 7)

I	Inertie du poteau
I_{eq}	Inertie du porte-à-faux avec âme équivalente (équation 7.6)
$I_{raideurs}$	Inertie totale de tous les raidisseurs
I_b	Inertie de la retenue torsionnelle
I_x	Inertie selon l'axe fort
I_y	Inertie selon l'axe faible
I_{y1}	Inertie selon l'axe faible de la semelle supérieure ($=b_1^3 t_1/12$)
I_{y2}	Inertie selon l'axe faible de la semelle inférieure ($=b_2^3 t_2/12$)
J	Constante de torsion de St-Venant (torsion pure)
J_1	Constante de torsion de la semelle supérieure ($=b_1 t_1^3/3$)
J_2	Constante de torsion de la semelle inférieure ($=b_2 t_2^3/3$)
K	Coefficient de longueur effective
k	Longueur du congé (figure 4.3)
K_1	Coefficient de longueur effective
K_2	Coefficient de longueur effective
k_c	Coefficient de retenue, plaque en compression
k_f	Coefficient de retenue, plaque en flexion
K_r	Rigidité du ressort
K_y	Coefficient de longueur effective pour la flexion latérale
K_z	Coefficient de longueur effective pour le gauchissement
L	Portée de la poutre
L_g	Longueur du gousset (figure 3.3)
L_p	Longueur du pont
L_s	Distance entre les supports latéraux
L_T	Portée de la poutre
M	Moment appliqué selon l'axe fort
m	Nombre de demi-longueurs d'onde au flambement
m_{ij}	coefficient de rangée i et de colonne j de la matrice

M_0	Moment de déversement élastique selon Timoshenko
M_{br}	Moment appliqué au ressort torsionnel (figure 2.13)
M_{cr}	Moment de déversement élastique
M_f	Moment pondéré appliqué
M_{infini}	Moment critique pour un assemblage de rigidité infinie
$M_{1/4}$	Moment critique pour un assemblage dont la rigidité est le quart de la rigidité initiale
M_{max}	Moment maximal
M_p	Moment plastique (plastification complète)
M_r	Moment résistant
M_r'	Moment résistant réduit
M_{tw}	Moment résistant de torsion dû à la torsion pure
M_{ue}	Moment de déversement élastique (équation 2.9)
M_w	Moment résistant de torsion dû au gauchissement
M_x	Moment induit selon l'axe fort
M_y	Moment induit selon l'axe faible; moment plastique (plastification des fibres extrêmes)
M_z	Moment induit de torsion
n	Nombre de segments (espacements entre ressorts)
N_{cr}	Charge de flambement
P	Charge de compression supportée
P_{cr}	Charge de flambement
P_d	Charge de compression supportée par les segments d'extrémité
P_{LL}	Charge du train pour le dimensionnement des entretoises
Q_{cr}	Charge critique de flambement (charge parabolique)
r	Rayon de giration minimal
R	Coefficient de rigidité (équation 6.101)
R_i	Rigidité élastique de l'assemblage

r_x	Rayon de giration selon l'axe fort
r_y	Rayon de giration selon l'axe faible
S	Espacement transversal entre les poutres
S'	Espacement transversal réduit
S_{adm}	Contrainte admissible en cisaillement
S_{ent}	Espacement des entretoises
S_{LL}	Espacement des essieux
S_x	Module de section, axe fort
t	Épaisseur de la semelle
t_1	Épaisseur de la plaque
t_1, t_2	Épaisseur des semelles supérieure et inférieure
t_a	Épaisseur de la semelle de la cornière (figure 4.3)
t_g	Épaisseur du gousset (figure 3.3)
t_s	Épaisseur du raidisseur (figure 2.14)
u	Déformée de l'âme
u_1	Déplacement latéral de la semelle supérieure
u_2	Déplacement latéral de la semelle inférieure
u_{inf}	déformée de la partie inférieure de l'âme
u_{sup}	déformée de la partie supérieure de l'âme
U	Déplacement du centre de la poutre
U_p	Énergie de la poutre
U_r	Énergie du ressort
U_t	Énergie totale
v	Demi-longueur de flambement
V	Déplacement du centre de la poutre; vitesse du train (m/s)
w	Épaisseur de l'âme
w_{eq}	Épaisseur équivalente de l'âme (équation 7.1 et 7.7)
w_{equiv}	Épaisseur équivalente de l'âme (équation 5.3)

W_{LL} Charge d'essieu maximale

x_{eff} Valeur efficace

Alphabet grec

β Rotation de la poutre; Rotation de l'âme

β_1 Rotation de la semelle supérieure

β_2 Rotation de la semelle inférieure

β_{as} Rigidité torsionnelle de l'assemblage

β_b Rigidité torsionnelle des supports (figure 2.13)

β_b^* Somme des rigidités torsionnelles

β_{ent} Rigidité torsionnelle de l'entretoise (figure 2.13)

β_g Rigidité torsionnelle du système global de retenue

β_i Rigidité torsionnelle initiale de l'assemblage

β_{sc} Rigidité torsionnelle de la section de la poutre (équation 2.59)

β_T Rigidité torsionnelle efficace (équation 2.58)

δ Raccourcissement

Δ Flèche du porte-à-faux (figure 7.7)

Δ_{eq} Flèche du porte-à-faux avec âme équivalente (équation 7.5)

ϕ_s Coefficient de tenue de l'acier

ϕ Coefficient d'élancement (équation 2.39)

Φ Fonction de flambement

λ Facteur d'élancement

Ψ Coefficient d'augmentation de rigidité

ν Coefficient de Poisson

σ Contrainte nominale

σ_{cr} Contrainte critique

σ_{tv}	Contrainte résultant de la torsion pure
σ_u	Contrainte ultime
σ_w	Contrainte résultant du gauchissement
σ_z	Contrainte selon l'axe z
ω_2	Facteur de chargement
θ	Rotation du ressort torsionnel (figure 2.13)

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A : CHARGEMENT COOPER.....	208
ANNEXE B : ÉTUDES DE CONVERGENCE	
B.1 Étude de convergence sur les éléments de voiles minces.....	213
B.1.1 Plaque en compression.....	214
B.1.2 Plaque en flexion.....	218
B.2 Étude de convergence sur le maillage.....	221
B.2.1 Maillage de l'âme.....	224
B.2.2 Maillage des semelles.....	228
ANNEXE C : INTÉGRATION DES CHARGES ÉQUIVALENTES	
C.1 Élément sans noeud intermédiaire, charge triangulaire.....	231
C.2 Élément sans noeud intermédiaire, charge constante	232
C.3 Élément avec un noeud intermédiaire, charge triangulaire	234
C.4 Élément avec un noeud intermédiaire, charge constante	235
C.5 Élément avec deux noeuds intermédiaires, charge triangulaire.....	237
C.6 Élément avec deux noeuds intermédiaires, charge constante.....	239
C.7 Élément avec deux noeuds intermédiaires, charge triangulaire double.....	241

ANNEXE D : MÉTHODE ÉNERGÉTIQUE.....	243
ANNEXE E : FICHIER D'ENTRÉE DE MATHEMATICA.....	251
ANNEXE F : MOMENTS DE DÉVERSEMENT OBTENUS.....	257

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Classification des types de ponts

Parmi les ponts ferroviaires en acier, on peut distinguer trois grandes familles selon le principe de conception du pont: les ponts travaillant en compression (les arcs), les ponts travaillant en traction (les ponts suspendus ou haubanés) et les ponts travaillant en flexion. Ces derniers sont composés de poutres qui peuvent être de deux types différents: des treillis ou des poutres à âme pleine.

Une autre façon de caractériser les ponts composés de poutres est d'après la position du tablier par rapport aux poutres (figure 1.1). Le tablier est la surface qui sert à la circulation des trains. Ce tablier peut être disposé au-dessus des poutres; on parlera alors de tablier supérieur (en anglais: deck bridge). À l'inverse, le tablier peut se situer plus bas que la semelle supérieure des poutres; la circulation des véhicules s'effectuant entre les poutres qui seront disposées de chaque côté du tablier. Nous parlerons alors de pont à tablier inférieur (through bridge).

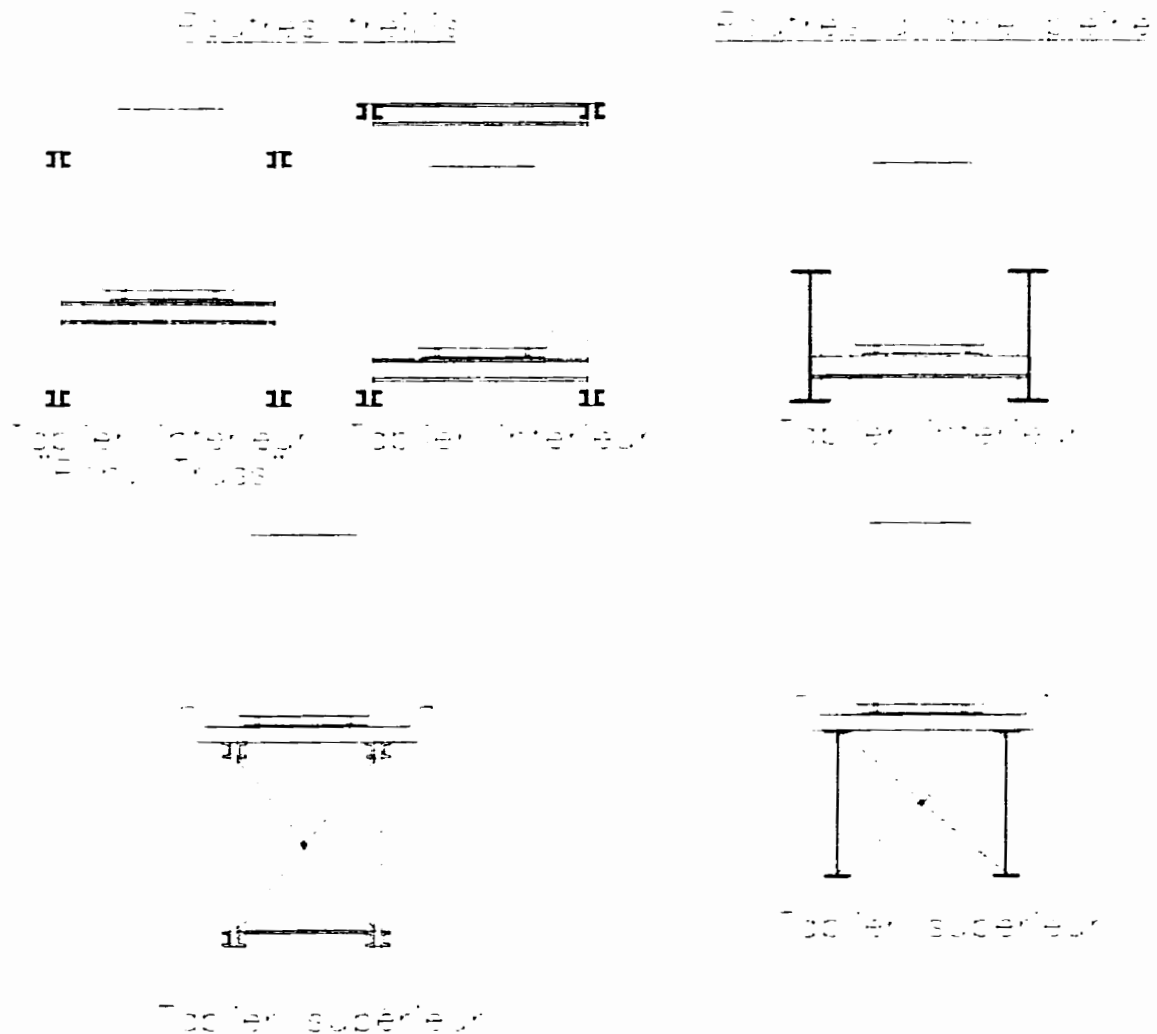


Figure 1.1 : Types de ponts ferroviaires

Les ponts à tablier inférieur dont les poutres sont à âme pleine sont utilisés pour des portées de 15 à 50 mètres. Les dimensions des poutres, plus particulièrement leur profondeur, sont limitées par les contraintes associées au transport des composantes sur le chantier. Les poutres sont généralement en portée simple. Une poutre continue viendra grandement compliquer la mise en place du pont puisque des joints de

construction devront être effectués durant la mise en place des poutres et qu'on ne pourra plus poser simplement la poutre sur ses appuis. Le recours à des échafaudages ou autres ouvrages temporaires sera alors requis, ce qui augmentera considérablement le coût de l'ouvrage et surtout la durée de sa mise en place. Dans le milieu ferroviaire, la rapidité de construction est un facteur déterminant, surtout pour le remplacement des structures existantes. Chaque heure perdue se traduit en des pertes financières importantes puisqu'il n'existe pas de chemins alternatifs ou de voies de contournement.

Un autre avantage des portées simples est qu'elles éliminent les renversements d'efforts qui posent des problèmes de fatigue supplémentaires. Or, la fatigue est souvent un facteur critique dans le milieu ferroviaire où les charges sont toujours très élevées et très répétitives.

Pour des portées supérieures à 50 mètres, on aura recours à un treillis ou encore à un nombre plus élevé de piliers intermédiaires.

Mentionnons également qu'un pont ferroviaire à tablier inférieur supportera généralement une seule voie de circulation. On préférera construire deux ponts côte à côte plutôt que de réunir les deux voies sur un même tablier, toujours pour des raisons économiques liées à la rapidité de la mise en place. Durant la construction de la deuxième voie, la première pourra être utilisée.

Pour des ponts à tablier inférieur constitués de poutres à âme pleine (en anglais: through plate girder bridges), les poutres ne sont pas reliées entre elles au niveau des

semelles supérieures. Puisque les véhicules passent entre les poutres, on ne peut évidemment pas utiliser de contreventements. Il en résulte que les semelles supérieures, qui sont aussi les semelles comprimées, ne sont pas supportées latéralement. Par contre, pour un pont en treillis (through truss bridge), la profondeur du treillis est généralement suffisante pour rattacher ensemble les cordes supérieures des treillis tout en permettant le passage des véhicules. Les véhicules circuleront alors littéralement « dans » le pont et on considère que la corde supérieure, qui est la corde comprimée, est supportée latéralement aux points d'attache du contreventement supérieur. Il existe aussi un type de pont à treillis dont la corde supérieure est libre. Cette configuration, connue sous le terme « pony truss », est utilisée, entre autres, pour des ouvrages temporaires (les ponts de type Bailey en sont un bon exemple). Les « pony trusses » furent utilisés de façon intensive jusqu'aux années 30 comme ponts routiers. L'augmentation du poids des camions et l'arrivée de nouveaux matériaux tels le béton précontraint et les poutres d'acier laminées ont depuis rendu plus rare l'utilisation de ce type de pont pour des constructions nouvelles.

Pour une même portée, un pont à tablier inférieur sera généralement plus lourd et donc plus coûteux qu'un pont à tablier supérieur. Le poids supplémentaire vient justement de l'absence de supports latéraux qui oblige l'ajout de pièces supplémentaires et limite la résistance des poutres maîtresses. À cela s'ajoute également le coût d'avoir des entretoises plus longues car les poutres maîtresses sont plus espacées latéralement. L'avantage d'avoir un tablier situé au même niveau que les poutres réside dans le seul fait

que cela permet un plus grand dégagement vertical sous le pont. En effet, en remontant les poutres au niveau du tablier plutôt qu'en les laissant dessous, on augmente le dégagement sous l'ouvrage d'une hauteur égale à la profondeur des poutres. On utilisera ainsi un pont à tablier inférieur lorsqu'on doit franchir un cours d'eau navigable dont les berges sont peu escarpées ou encore en milieu urbain pour les croisements entre routes et chemins de fer. Le dégagement ainsi gagné évitera d'avoir à surélever l'ensemble de la voie ferroviaire. Les économies réalisées sur le coût des remblais compenseront largement le coût supérieur du pont car les pentes maximales admises dans le domaine ferroviaire sont très faibles. Dans le domaine routier, les pentes maximales sont beaucoup plus grandes et on préférera un pont moins coûteux mais qui obligera les automobiles à grimper plus haut ou à descendre plus bas.

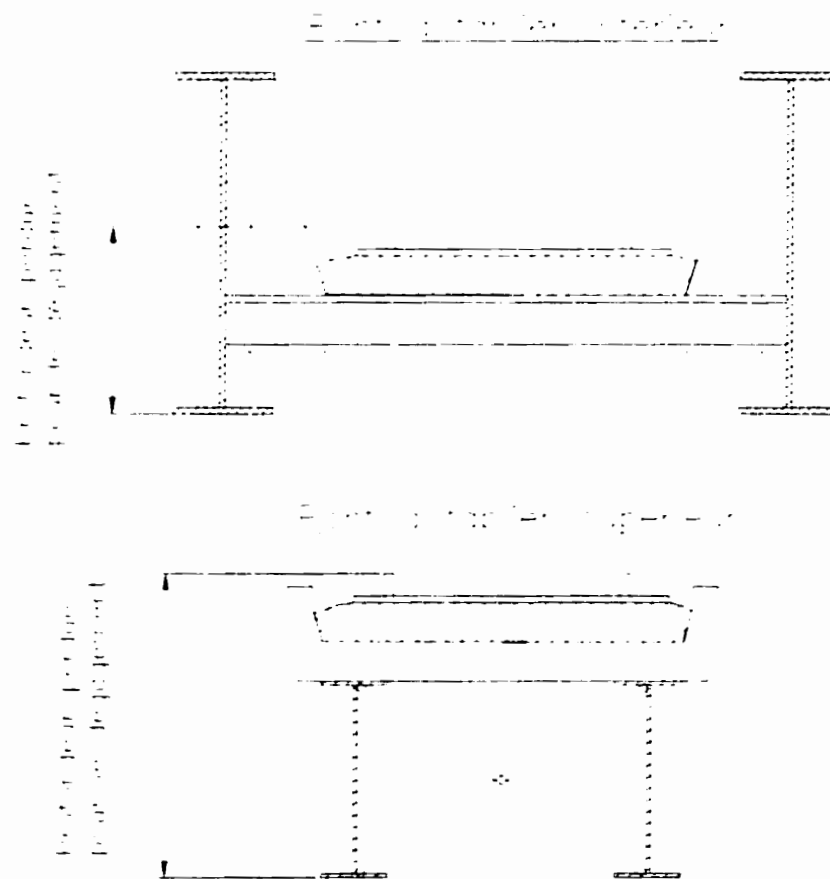
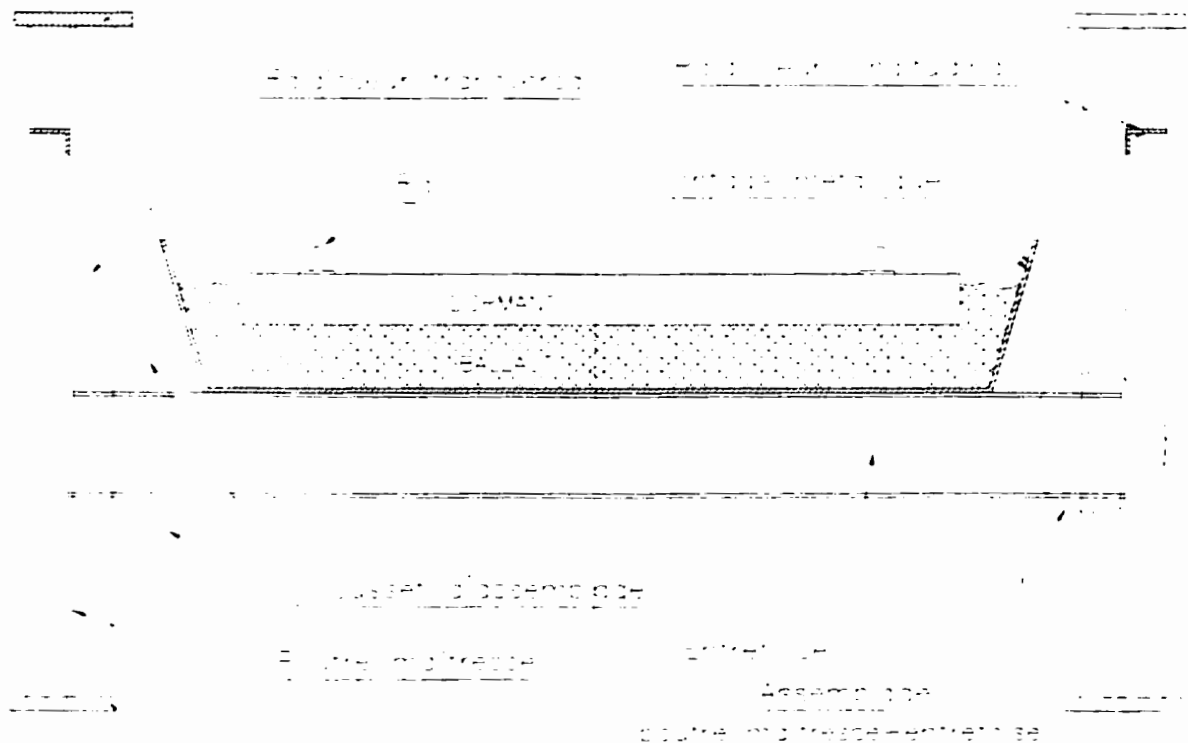


Figure 1.2 : Tablier inférieur et tablier supérieur

Dans le cadre de ce mémoire, nous étudierons les problèmes spécifiques aux ponts ferroviaires à tablier inférieur à âme pleine. Plus spécifiquement, nous étudierons les problèmes liés à la résistance au déversement des poutres qui n'ont pas de système de supports latéraux au niveau de la semelle supérieure.

1.2 Nomenclature des principales composantes des ponts à tablier inférieur à âme pleine.

La nomenclature des différentes composantes typiques à un pont à tablier inférieur à âme pleine est présentée à la figure 1.3.



Railway Engineering Association (AREA) intitulée « Manual for Railway Engineering » et dont la dernière refonte majeure remonte à 1988. Cet ouvrage est mis à jour régulièrement, la dernière édition étant parue en 1996. Ce mémoire est toutefois basé sur la version 1988 de la norme (AREA, 1988). Jusqu'en 1977, il existait une version canadienne de cette norme dénommée CSA-S1 (CSA, 1966) dont la dernière version date de 1966 et qui était calquée sur celle l'AREA de l'époque. En 1977, l'Association Canadienne de Normalisation (CSA/ACNOR) décida d'arrêter la publication de cette norme au profit de celle l'AREA (CSA, 1978a).

Le « Manual for Railway Engineering » est divisé en 33 chapitres qui traitent de tous les sujets rattachés à la construction et à l'entretien des ouvrages reliés aux chemins de fer, depuis le choix du ballast et les méthodes de conservation du bois jusqu'aux questions environnementales en passant par le calcul des structures en béton, des rails et des gares.

Le chapitre 15 porte sur les structures en acier, plus spécifiquement sur les ponts. Il est divisé en 9 parties dont voici les sujets:

1. Calcul des ponts faits d'acier ASTM-A36;
2. Calcul des ponts en aciers à haute résistance;
3. Procédés de fabrication;
4. Construction et de mise en place;
5. Structures de type particulières;

6. Ponts mobiles;
7. Ponts existants;
8. Divers;
9. Commentaires et bibliographie.

Le calcul proprement dit est ainsi décrit dans les parties 1 et 2. La partie 1 comprend toutes les règles de conception. Celles-ci sont basées sur l'utilisation de l'acier ASTM-A36 ($F_y=248$ MPa , $F_u=414$ MPa) qui est le matériau le plus couramment utilisé. La partie 2 est un simple ajout à la première et traite du calcul des contraintes admissibles des pièces qui sont fabriquées à partir d'un autre acier que celui qui répond aux critères ASTM A36.

La partie 1 est subdivisée en 14 sections:

1. Appel d'offres et plans;
2. Spécifications générales;
3. Charges, forces et contraintes;
4. Contraintes admissibles;
5. Détails généraux de conception;
6. Membrures comprimées;
7. Membrures fléchies;
8. Poutres de plancher;
9. Assemblages rivetés et boulonnés;

- 10. Soudure;
- 11. Contreventement;
- 12. Rotules et membrures rotulées;
- 13. Appareils d'appuis et joints d'expansion;
- 14. Membrures critiques pour la fissuration (fatigue).

1.3.1 Charges de calcul

Les charges de calcul sur le pont sont divisées en trois catégories: le poids propre, la charge vive et les autres charges (principalement les charges latérales).

1.3.1.1 Poids propre

Le poids propre comprend les charges de gravité dues au poids de la structure elle-même. La norme de l'AREA donne les valeurs des densités des matériaux qui sont à utiliser: densité de l'acier (7850 kg/m^3), du béton (2400 kg/m^3), du ballast (1920 kg/m^3), du bois (960 kg/m^3), etc. La norme définit également le poids linéaire à considérer pour les rails, soit 300 kg par mètre linéaire.

1.3.1.2 Charge vive

La charge vive est celle que le train (la locomotive et les wagons) applique sur le pont lors de son passage. Le chargement de type Cooper E80 (figure 1.4) est recommandé. L'équivalent en système métrique (Duffield et al., 1986), le chargement Cooper M356, est également représenté à la figure 1.4. Toutefois, l'ingénieur ajustera cette charge en

fonction du trafic réel que le pont est appelé à rencontrer. Dans ce cas, la charge à considérer aura la même répartition que la charge Cooper mais l'amplitude des charges sera majorée (voir annexe A).

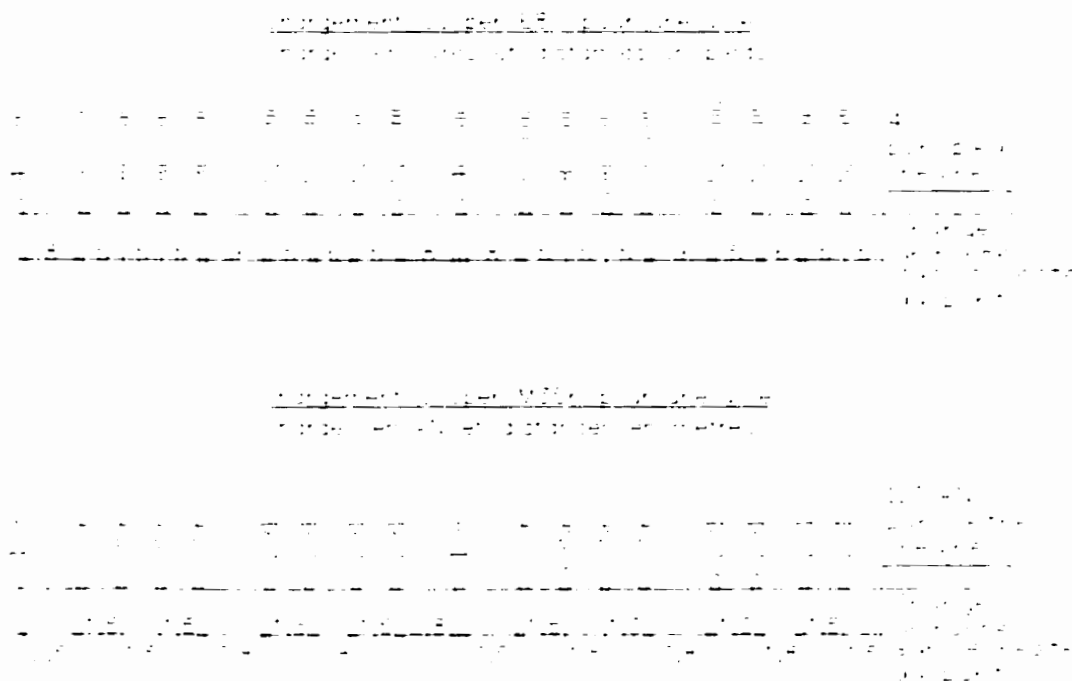


Figure 1.4 : Chargement Cooper E80 et Cooper M356

Évidemment, le chargement Cooper sera positionné sur le pont de manière à produire l'effort maximal, et ce pour chaque composante du pont. De plus, un coefficient de majoration dynamique des efforts, communément appelé facteur d'impact, sera ajouté au chargement Cooper. Cet effet correspondra à un pourcentage du chargement Cooper. Ce pourcentage est déterminé à partir de la portée des poutres (L) et de l'espacement entre les poutres longitudinales (S) comme suit, pour L et S en mètres:

$$L < 24,38 \text{ mètres} : \frac{30,48}{S} + 40 - \frac{3L^2}{148,6} \quad (1.1)$$

$$L \geq 24,38 \text{ mètres} : \frac{30,48}{S} + 16 + \frac{182,9}{L - 9,14} \quad (1.2)$$

La majoration dynamique sera toutefois diminuée si le pont supporte plus de deux voies ou s'il supporte deux voies et que sa portée dépasse 53 mètres (175 pieds).

1.3.1.3 Autres charges

La norme de l'AREA définit aussi trois charges latérales et une charge longitudinale pour le pont. Les trois charges latérales sont : la force centrifuge, la force due au vent et les efforts occasionnés par le train lui-même.

La force centrifuge (F_{cen}) est fonction de la vitesse du train (V , en mètres par seconde) et du rayon de courbure horizontale du pont (R , en mètres) et est, comme la force d'impact, exprimée en pourcentage du chargement Cooper (sans impact), selon la formule suivante:

$$F_{cen} = \frac{V^2}{R \cdot 9,81} \cdot 100 \quad (1.3)$$

Cette charge centrifuge s'applique horizontalement à un point situé à 1,83 mètres (6 pieds) au-dessus des rails et mesuré selon une ligne perpendiculaire à une ligne joignant les rails et équidistante de ceux-ci.

La force de vent à considérer est de deux types: celle qui s'applique sur un pont en opération (où circule un train) et celle qui s'applique sur un pont qui n'est pas en opération. Cette distinction tient du fait qu'au-delà d'un certain niveau de vent, durant un ouragan par exemple, les opérations ferroviaires seraient paralysées et qu'un train ne se risquera pas à traverser un pont.

La force à appliquer sur un pont en opération est une charge linéaire de 4,38 kN par mètre linéaire (300 livres par pied linéaire) par voie, appliquée à une distance de 2,44 mètres (8 pieds) au-dessus des rails. Cette charge est celle du vent sur le train. Il faut lui additionner une charge de 1,44 kN/m² (30 livres par pied carré) qui s'applique sur la projection verticale du pont, multipliée par un facteur de 1,5 dans le cas d'un pont à poutres à âme pleine (par opposition à un pont en treillis). Cette charge supplémentaire correspond au vent agissant directement sur la structure et ne doit pas être inférieure à 2,92 kN par mètre linéaire (200 livres par pied linéaire).

Pour un pont qui n'est pas en opération, on considérera uniquement la poussée du vent sur la structure. Dans ce cas, on utilisera les mêmes surfaces que précédemment mais la pression appliquée sera de 2,40 kN/m² (50 livres au pied carré) plutôt que 1,44 kN/m².

Dans tous les cas, la charge de vent devra être considérée comme une charge mobile s'appliquant dans un plan horizontal.

La charge latérale du troisième type est celle causée par le mouvement latéral du train sur les rails. Il s'agit d'une charge ponctuelle mobile qui s'applique à la base du rail et dont la valeur correspond au quart de la charge de l'essieu le plus chargé.

Finalement, la norme de l'AREA définit une charge longitudinale qui est appliquée à la base du rail et qui est égale à 15% de la charge vive (sans impact). Dans le cas de rails continus sur toute la longueur du pont, cette charge sera diminuée par un facteur de $L_P/370$, où L_P est la longueur du pont en mètres. Ce facteur ne pourra pas être supérieur à 0,80.

L'édition 1988 de la norme de l'AREA ne comporte aucune disposition relative aux séismes.

1.3.2 Résistance

La norme de l'AREA fait appel au calcul aux contraintes admissibles. Les charges décrites précédemment sont ainsi ajustées en conséquence. La norme définira donc, pour différents modes de sollicitation de l'acier, des niveaux de contraintes maximaux qui devront être respectés lors des calculs. Cette méthode de calcul est, par le fait même, basée sur un comportement élastique de l'acier. Les contraintes admissibles sont principalement basées sur la contrainte de plastification de l'acier utilisé (F_y).

Les contraintes admissibles qui nous intéressent plus particulièrement sont récapitulées au tableau 1.1. Les valeurs dans ce tableau ont été converties au système international d'unités.

Tableau 1.1 : Contraintes admissibles (AREA 1988)

Sollicitation		Contrainte admissible
Traction axiale pure		$0,55F_y$
Flexion, traction dans les fibres extrêmes		$0,55F_y$
Compression axiale pure	$\frac{KL_s}{r} \leq \frac{282}{\sqrt{F_y}}$	$0,55F_y$
	$\frac{282}{\sqrt{F_y}} < \frac{KL_s}{r} < \frac{2254}{\sqrt{F_y}}$	$0,60F_y - \left(\frac{F_y}{11,5}\right)^{1,5} \frac{KL_s}{r} \quad (1.4)$
	$\frac{KL_s}{r} \geq \frac{2254}{\sqrt{F_y}}$	$\frac{0,5\pi^2 E}{\left(\frac{KL_s}{r}\right)^2} \quad (1.5)$
Flexion, compression dans les fibres extrêmes, poutres soudées ou laminées		<p>Le plus grand de:</p> $0,55F_y - \frac{0,55F_y^2}{86000} \left(\frac{L_s}{r_y}\right)^2 \quad (1.6)$ $\frac{72000}{L_s d} \leq 0,55F_y \quad (1.7)$ <p style="text-align: center;">A_f</p>
Flexion, compression dans les fibres extrêmes, poutres rivetées ou boulonnées		$0,55F_y - \frac{0,55F_y^2}{86000} \left(\frac{L_s}{r_y}\right)^2 \quad (1.8)$
Cisaillement dans l'âme des poutres		$0,35F_y$

F_y : limite élastique de l'acier (MPa);

K : coefficient de longueur effective : 7/8 pour les pièces rotulées ; 3/4 pour les autres pièces;

L_s : distance entre les appuis latéraux;

r : rayon de giration;

r_y : rayon de giration de la semelle comprimée et de la portion de l'âme en compression, calculée par rapport à l'axe faible de la poutre;

A_f : aire de la plus petite des semelles;

d : profondeur totale de la poutre.

On retrouvera au chapitre suivant la dérivation des équations utilisées pour le calcul des contraintes admissibles en flexion. Mentionnons toutefois que le calcul de la contrainte admissible est basé sur la plastification de la poutre et aussi sur le déversement élastique ou inélastique de la poutre. Ce calcul de déversement provient d'un développement théorique réalisé par Winter et Thürliman (AREA, 1988). Ils ont développé la formule suivante qui donne la contrainte critique de déversement d'une poutre en I :

$$f_{\sigma} = \left\{ \left[\frac{E\pi^2}{2(L_s d)^2} \right]^2 \left(\frac{I_y}{2I_x} \right)^2 + \left[\frac{E\pi^2}{2(L_s d)^2} \right]^2 \left(\frac{JI_y}{2(1+\nu)I_x^2} \right) \left(\frac{L_s}{\pi d} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (1.9)$$

E : module d'Young;

I_y : inertie de la poutre selon l'axe faible (figure 1.5);

I_x : inertie de la poutre selon son axe fort (figure 1.5);

J : constante de torsion de St-Venant;

ν : coefficient de Poisson.

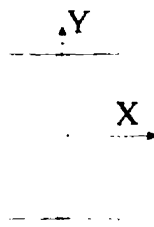


Figure 1.5 : Axes de calcul d'inertie

Cette formule est équivalente à celle du moment de déversement d'une poutre développée par Timoshenko (Timoshenko, 1947) qui est utilisée dans les normes canadiennes de conception des structures en acier (CSA, 1994).

$$M_{uc} = \frac{\pi}{L_s} \sqrt{EI_y GJ + \left(\frac{\pi}{L_s} \right)^2 EI_y EC_w} \quad (1.10)$$

On retrouvera le passage d'une équation à l'autre au chapitre suivant.

Le phénomène de la fatigue est traité par la même approche. Une contrainte maximale admissible est définie pour chaque type de sollicitation en fonction du nombre de cycles de chargement et de certains détails de construction. La norme spécifie d'ailleurs deux critères pour la fatigue selon que la rupture de l'élément étudié entraîne la ruine de l'ouvrage ou non (Fracture Critical Members).

1.3.3 Autres considérations de conception

La norme de l'AREA définit aussi une suite de critères géométriques et de règles de pratique pour assurer une conception adéquate de la structure. Ainsi, l'élancement devra être inférieur à 100 pour une pièce comprimée, à 200 pour une pièce tendue et à 157 pour une poutre. Dans ce dernier cas, la longueur utilisée sera la distance entre les appuis latéraux de l'aile en compression et le rayon de giration sera celui de la partie comprimée de la poutre calculé par rapport à l'axe Y (figure 1.5).

Pour pallier à une perte de l'épaisseur des composantes due à la corrosion, l'épaisseur minimale d'une pièce sera de 8,5 mm (0,335 pouces). L'épaisseur d'une âme sera au moins égale à 1/6 de l'épaisseur des semelles et 1/170 de la profondeur de l'âme. Cette âme devra être raidie lorsque son épaisseur sera inférieure à 1/60 de sa profondeur. Dans ce cas, les raidisseurs seront disposés de chaque côté de l'âme et espacés de :

$$d_s = \frac{34,4w}{\sqrt{S_{adm}}} \leq 1830 \text{ mm} \quad (1.11)$$

où S_{adm} est la contrainte admissible de l'acier en cisaillement (en MPa) et w l'épaisseur de l'âme (en mm). Les raidisseurs auront un rapport largeur/épaisseur inférieur à 16 et leur largeur de chaque côté de l'âme sera de 51 mm (2 pouces) plus 1/30 de la profondeur de la poutre. Un raidisseur simple (un seul côté de l'âme) pourra être utilisé s'il possède la même inertie calculée par rapport à l'axe Z.

La norme traite spécifiquement des ponts à tablier inférieur à âme pleine à l'article

1.11.1 qui mérite d'être cité intégralement:

« The top flanges of through plate girders shall be braced at the panel points by brackets with web plates. The brackets shall extend to the top flange of the main girder and be as wide as the clearance will allow. They shall be attached securely to a stiffener on the girders and to the top flange of the floorbeam. On solid floor bridges the brackets shall not be more than 12 ft apart. »

Cet article spécifie explicitement que la poutre devra être rattachée au plancher par des goussets. Ces goussets seront conçus le plus large possible, ce qui revient à dire que leurs dimensions seront limitées par l'espace qu'il faut réserver pour le passage des véhicules. Cet espace est décrit dans la norme par un schéma de dégagement (voir figures 1.6 et 1.7). Cependant, chaque compagnie ferroviaire précisera elle-même son schéma de dégagement qui tiendra compte des dimensions réelles de sa flotte. Toujours d'après l'article 1.11.1, ces goussets seront attachés solidement à un raidisseur de la poutre d'un côté et à la semelle supérieure d'une entretoise de l'autre. L'espacement maximal permis entre les goussets est de 3,65 mètres (12 pieds).

L'objectif premier de cet article est d'assurer un support latéral à la semelle comprimée. Ce support sera fourni par les entretoises via un gousset d'assemblage. Ne connaissant pas la rigidité minimale pour assurer la pleine efficacité de ce support, on espérera que cette rigidité minimale sera moindre que la rigidité que l'on peut fournir en réalité dans le pont.

D'un point de vue structural, cet article est assez particulier. En effet, on définit la dimension d'une pièce non pas par les forces qu'elle devra supporter mais bien par un critère de dégagement géométrique. De même, la distance prescrite de 3,65 mètres ne tient nullement compte des dimensions et des sollicitations du pont. Quant à l'assemblage solide qui doit être fourni, il n'est nullement quantifié.

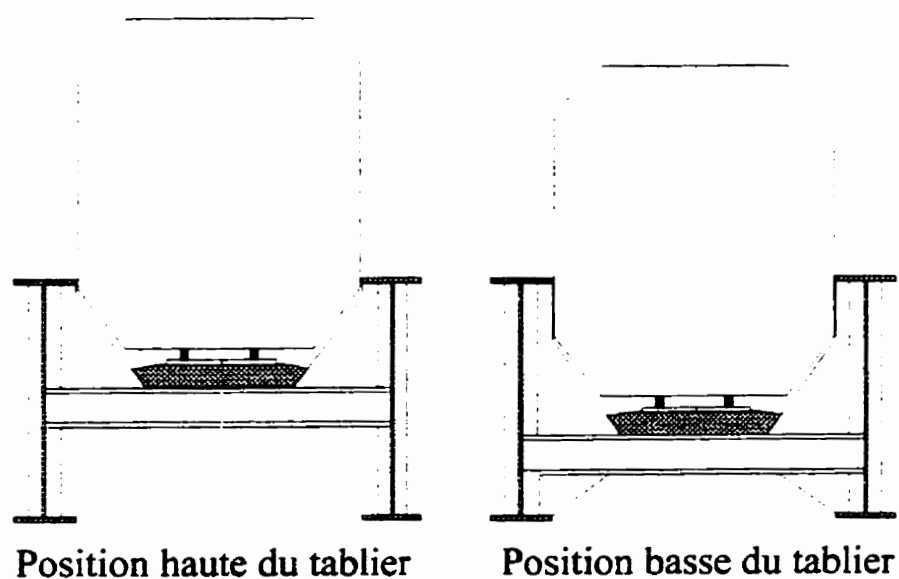


Figure 1.6 : Dimensionnement des goussets d'assemblage

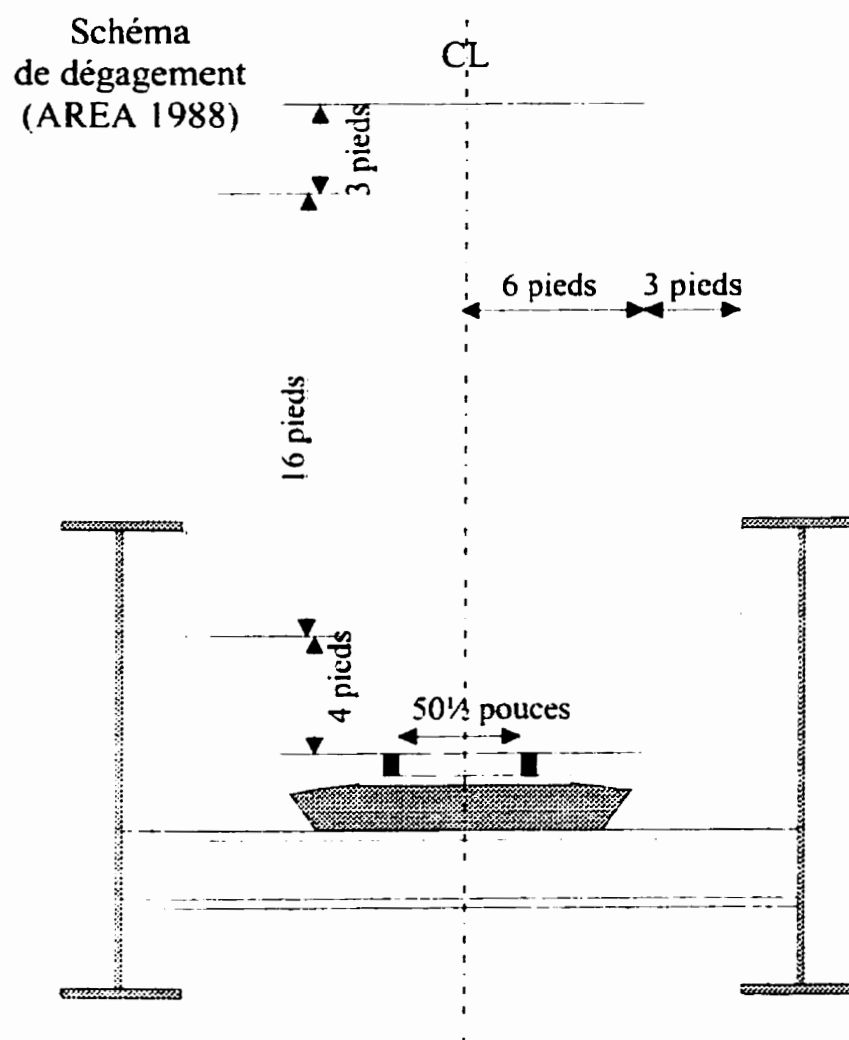


Figure 1.7 : Schéma de dégagement

1.4 Normes S6 et S16.1

Les normes CSA-S6 et CSA-S16.1 ne portent pas directement sur les ponts ferroviaires. Il s'agit en fait des normes canadiennes qui régissent les ponts routiers et les

constructions en acier. Leur mise à jour et leur vision plus récente des divers problèmes, particulièrement quant à l'utilisation du calcul aux états limites plutôt que celui des contraintes admissibles, en font toutefois des références incontournables.

La résistance pondérée d'une poutre selon ces normes est obtenue à partir d'une résistance ultime alors que les charges à considérer sont obtenues des charges d'utilisation qui sont majorées. La résistance et les sollicitations sont ainsi plus grandes que celles utilisées pour le calcul aux contraintes admissibles.

La résistance d'une poutre selon les états limites ultimes (M_r) est calculée selon l'une des trois formules suivantes selon que la poutre va déverser avant la plastification ou non. On utilisera M_p lorsque la poutre est de classe 1 ou 2 (sections compactes) et M_y pour des poutres de classe 3 (sections non-compactes).

$$1. \quad M_r = \phi_s M_p \quad (1.12)$$

$$2. \quad M_r = \phi_s M_{ue} \quad (1.13)$$

$$3. \quad M_r = 1,15\phi_s M_p \left(1 - \frac{0,28M_p}{M_{ue}} \right) \leq \phi_s M_p \quad (1.14)$$

M_p : Moment plastique (plastification complète de la poutre);

M_y : Moment plastique (plastification des fibres extrêmes de la poutre);

M_{ue} : Moment de déversement élastique;

ϕ_s : coefficient de tenue de l'acier.

L'équation 1.12 s'applique à une poutre trapue dont le premier mode de rupture est la plastification. L'équation 1.13 s'applique pour une poutre élancée dont le premier mode de rupture est le déversement élastique. Finalement, une zone de transition est définie par l'équation 1.14 pour les poutres qui déversent de façon inélastique. On considère qu'une poutre déverse élastiquement lorsque $M_{ue} \leq 0,67 M_p$ pour une section compacte et lorsque $M_{ue} \leq 0,67 M_y$ pour les autres sections. Ce point définit la limite d'utilisation des équations 1.13 ou 1.14. Notons que la résistance obtenue ne peut dépasser la résistance en plastification (équation 1.12).

Pour le calcul du moment de déversement élastique de la poutre (M_{ue}), les normes CSA-S6 et CSA-S16.1 proposent l'équation suivante, semblable à l'équation 1.10 et que nous reverrons en détail au chapitre suivant.

$$M_{ue} = \frac{\omega_2 \pi}{L_s} \sqrt{EI_y GJ + \left(\frac{\pi}{L_s}\right)^2 EI_y EC_w} \quad (1.15)$$

G : module de cisaillement

C_w : constante de gauchissement

ω_2 : coefficient de chargement

Dans cette équation, le coefficient ω_2 , appelé coefficient de chargement, sert à tenir compte du diagramme du moment fléchissant qui est appliqué à la poutre. Pour un moment constant, ω_2 vaut 1 et l'équation 1.15 correspond à l'équation 1.10. Ce coefficient peut prendre une valeur inférieure à l'unité lorsque la charge est appliquée sur

l'aile supérieure alors qu'il est supérieur à 1.0 lorsque le diagramme des moments n'est pas constant.

Pour des sections dont l'âme ne rencontre pas les exigences de classe 3 (poutres élancées avec âmes de classe 4), le moment résistant (M_r) sera réduit (M_r') pour tenir compte du voilement horizontal de l'âme dû aux contraintes normales de compression produites par la flexion. Pour une poutre doublement symétrique, on a :

$$M_r' = M_r \left[1,0 - 0,005 \frac{A_w}{A_{fc}} \left(\frac{h}{w} - \frac{1900}{\sqrt{M_r \phi_x S_x}} \right) \right] \quad (1.16)$$

A_w : aire de l'âme;

A_{fc} : aire de la semelle comprimée;

h : profondeur de l'âme;

w : épaisseur de l'âme;

M_r : charge pondérée appliquée;

S_x : module de section de la poutre selon l'axe fort.

1.5 Problématique

Dans les deux normes décrites précédemment, on tient compte de la possibilité du déversement des poutres. Pour ce faire, toutes deux sont fondées sur un développement

théorique qui a comme hypothèse de base que la poutre va déverser entre des retenues latérales fixes. En aucun cas, la rigidité des retenues latérales n'entre en jeu. Cette hypothèse peut être correcte dans le cas d'une poutre supportée latéralement par des contreventements qui retiennent directement son aile supérieure. Dans ce cas, les contreventements ont généralement deux rôles à assumer: assurer la stabilité des poutres et résister aux charges latérales. Or, pour ce type de contreventement, le dimensionnement des contreventements pour les charges latérales est beaucoup plus exigeant que le dimensionnement pour assurer la stabilité de l'ouvrage.

Ceci n'est cependant pas acceptable dans le cas d'un pont à tablier inférieur à âme pleine où la rigidité nécessaire est beaucoup plus élevée. Pour ce type de pont, une approche différente se doit d'être utilisée pour tenir compte de la rigidité des retenues. Il importe de déterminer quelle sera la rigidité suffisante pour considérer les appuis latéraux comme fixes ou alors d'incorporer cette rigidité dans les calculs de la résistance de la poutre au déversement.

Deux modèles sont proposés dans la littérature pour calculer la résistance au déversement d'une poutre avec des appuis latéraux non rigides. Le premier ne considère que la semelle en compression de la poutre. Celle-ci est alors vue comme un poteau supporté latéralement par des ressorts qui représentent la rigidité des supports latéraux (figure 1.8a). Le deuxième modèle traite la poutre au complet mais remplace les retenues offertes par les entretoises et les goussets par des ressorts torsionnels (figure 1.8b).

Différents auteurs ont utilisé ces deux modèles pour développer des équations de calcul de la résistance. Ces développements seront revus au chapitre 2.

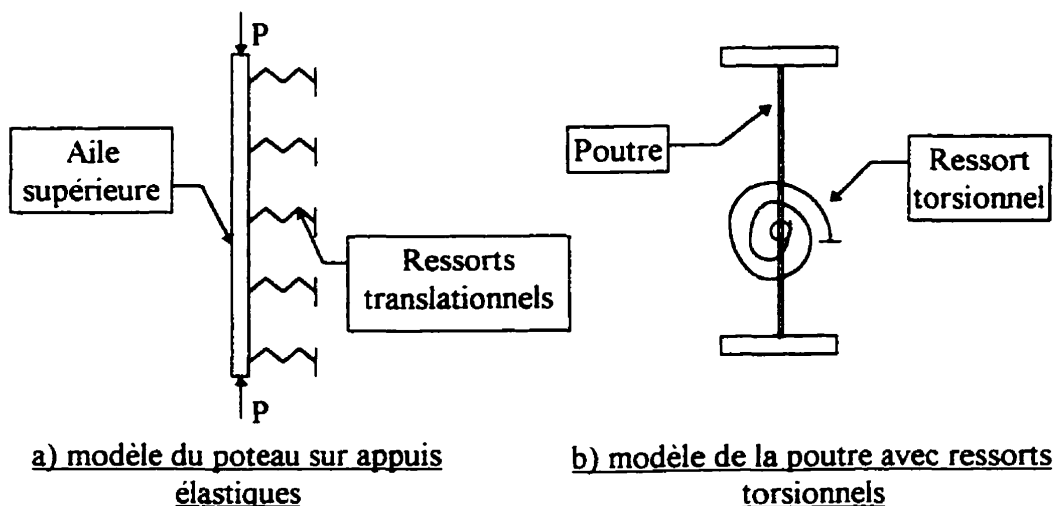


Figure 1.8 : Modèles d'une poutre avec appuis latéraux élastiques

1.6 Objectifs

L'objectif de cette recherche est d'établir une méthode pratique permettant d'évaluer correctement le moment produisant le déversement élastique d'une poutre (M_{cr}) dont les retenues latérales sont celles que l'on retrouve sur un pont à tablier inférieur à âme pleine. Cette méthode se devra d'inclure tous les mécanismes pouvant influencer la résistance au déversement d'une poutre. Elle devra aussi pouvoir être utilisée aisément pour la conception et l'évaluation des ponts.

Une fois le moment M_{cr} connu, le concepteur pourra, à l'aide de courbes de calculs, compléter la conception des poutres maîtresses (voir figure 1.9). Ces courbes de calcul, basées sur des résultats expérimentaux, permettent d'inclure les phénomènes de plastification dans la conception de la poutre. Elles incluent donc également les contraintes résiduelles et les défauts de rectitude des pièces. Les équations 1.12, 1.13, 1.14 et celles du tableau 1.1 sont des bons exemples de ces courbes de calcul.

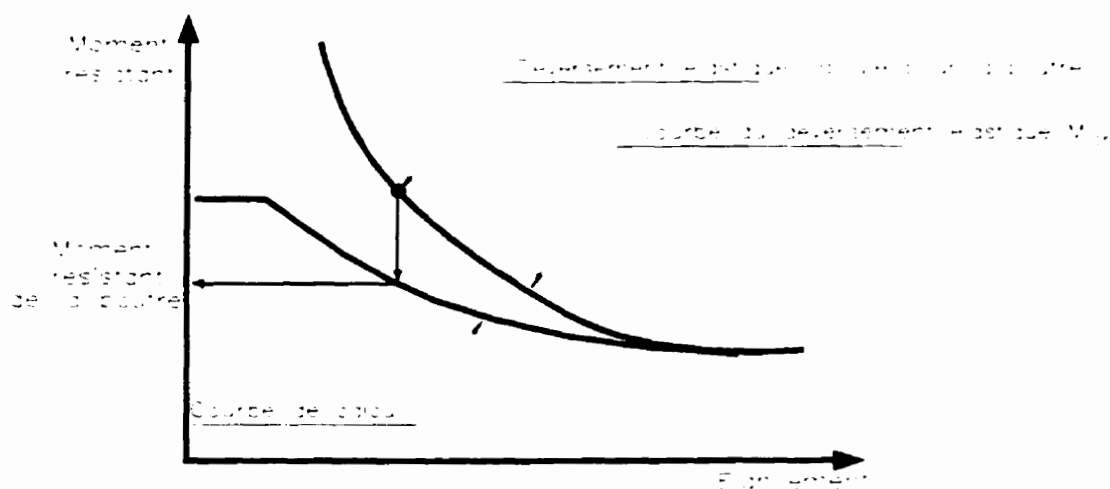


Figure 1.9 : Utilisation des courbes de calcul

Le calcul du moment de déversement élastique est, à toutes fins pratiques, un artifice mathématique puisque le mode de rupture de la poutre ne sera pas le déversement mais plutôt la plastification ou encore une combinaison des deux. Toutefois, l'utilisation de la valeur de M_{cr} , lorsque comparée au moment de plastification de la poutre, permet de prédire lequel des modes de rupture prédomine et ainsi d'évaluer la résistance associée à ce mode de rupture.

1.7 Portée du travail

Les étapes suivantes sont accomplies pour réaliser cet objectif.

1. Dans un premier temps, nous revoyons le phénomène du déversement des poutres et les méthodes classiques d'analyse de ce phénomène (chapitre 2).
2. Nous identifions et décrivons le rôle de chacune des composantes d'un pont à tablier inférieur à âme pleine dans le phénomène du déversement (chapitre 3).
3. Un modèle d'éléments finis est développé pour un pont type. Ce modèle est validé pour des cas simples à l'aide de résultats connus et généralement acceptés (chapitre 4).
4. À l'aide de ce modèle, nous effectuons une étude paramétrique qui permet de mieux comprendre et de quantifier les effets des différentes composantes du pont (chapitre 5).
5. Une méthode d'analyse est alors proposée qui vient englober les résultats obtenus de l'étude paramétrique et les résultats des analyses classiques (chapitres 6 et 7).
6. Finalement, cette méthode est validée sur différents ponts et par différents outils analytiques et numériques (chapitre 7).

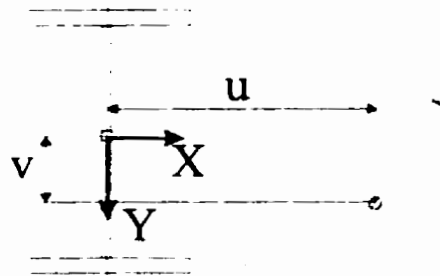
CHAPITRE 2

ANALYSE CLASSIQUE DU DÉVERSEMENT

2.1 Approche usuelle

Le phénomène du déversement d'une poutre est maintenant bien connu. Il fut abordé pour la première fois en 1899 par Prandtl et par Mitchell (Bleich, 1952). Ceux-ci arrivèrent, chacun de leur côté, à une équation différentielle du deuxième ordre aux coefficients variables pour décrire le phénomène. Le plus grand développement fut toutefois accompli par Timoshenko en 1913 (Timoshenko, 1913) lorsqu'il parvint à résoudre cette équation. Les travaux de Timoshenko demeurent, depuis, la référence en matière de déversement des poutres et les résultats qu'il présente ont été maintes fois repris par différents auteurs sous des formes variées.

Une des approches utilisées est la suivante (Timoshenko, 1947). Elle consiste à faire l'équilibre des forces d'une poutre soumise à un moment uniforme selon son axe fort (M) lorsque cette poutre est en position déformée de déversement.



β Note: aucune distorsion de la section permise

Figure 2.1 : Déversement d'une poutre (analyse classique)

Le déplacement latéral de la poutre et sa rotation vont induire, à partir du moment appliqué ($M=M_x$), un moment selon l'axe faible (M_y) et un moment de torsion (M_z).

$$M_y = M\beta \quad (2.1)$$

$$M_z = M \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (2.2)$$

À l'équilibre, ces moments sont équilibrés par la résistance interne de la poutre.

Pour la flexion selon l'axe faible, cela donne:

$$M_y = -EI_y \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.3)$$

Pour la résistance à la torsion, celle-ci sera composée de deux parties: la résistance due à la torsion pure (ou torsion de St-Venant) (M_v) et la résistance due au gauchissement (M_w).

$$\begin{aligned} M_z &= M_v + M_w \\ &= GJ \frac{\partial \beta}{\partial z} - EC_w \frac{\partial^3 \beta}{\partial z^3} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Le système d'équations différentielles obtenu est donc:

$$EI_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + M\beta = 0 \quad (2.5)$$

$$EC_w \frac{\partial^3 \beta}{\partial z^3} - GJ \frac{\partial \beta}{\partial z} + M \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

En dérivant l'équation 2.6 et en y substituant l'équation 2.5, on obtient l'équation suivante:

$$EC_w \frac{\partial^4 \beta}{\partial z^4} - GJ \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} - \frac{M^2}{EI_v} \beta = 0 \quad (2.7)$$

C'est cette équation qui définit le déversement.

La solution de l'équation 2.7 dépend, comme toute équation différentielle, des conditions frontières du problème spécifique étudié. Le cas le plus généralement utilisé est également le plus critique. Il s'agit du cas où u et β sont nuls aux supports latéraux. Vis-à-vis de ces supports, on suppose que le gauchissement est libre de se produire mais

que le déplacement latéral et horizontal est bloqué. Ces conditions se traduisent par les équations suivantes:

$$\begin{aligned} u(0) &= u(L_s) = 0 \\ \beta(0) &= \beta(L_s) = 0 \\ u''(0) &= u''(L_s) = 0 \\ \beta'(0) &= \beta'(L_s) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

De ces hypothèses et conditions frontières, nous pouvons résoudre l'équation différentielle pour obtenir l'équation suivante, bien connue:

$$M_{uc} = \frac{\pi}{L_s} \sqrt{EI_y GJ + \left(\frac{\pi}{L_s}\right)^2 EI_y EC_w} \quad (2.9)$$

2.1.1 Hypothèses de base

Deux hypothèses sont sous-jacentes à la dérivation de l'équation 2.7. Ces hypothèses ne sont généralement pas mentionnées car elles sont généralement satisfaites pour les poutres usuelles.

2.1.1.1 Distorsion de la section

La première de ces hypothèses est que la section de la poutre ne se déforme pas dans son plan. L'âme reste droite de même que les semelles. Lors du déversement, la poutre tourne autour de son centre de cisaillement mais elle ne se déforme pas (voir figure 2.1).

Cette hypothèse est généralement valable pour les poutres longues. Dans le cas de poutres courtes, il peut y avoir distorsion de la section lors du déversement et le moment critique obtenu de l'équation 2.7 est alors surestimé.

2.1.1.2 Appuis latéraux

Une autre hypothèse sous-jacente à la théorie est que les appuis sont fixes. Les conditions frontières utilisées supposent un déplacement latéral et une rotation de la poutre nuls aux deux extrémités. La rigidité des appuis n'entre pas en ligne de compte.

2.1.2 Autres conditions frontières et chargements

L'équation 2.7 peut être résolue pour d'autres cas de conditions frontières. Les résultats alors obtenus sont toutefois plus complexes et plus difficiles à utiliser. Une des façons d'exprimer ces résultats est d'utiliser des coefficients de longueur effective pour la flexion latérale (K_y) et pour le gauchissement (K_z) que l'on inclut dans l'équation 2.9:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{K_y L_s} \sqrt{EI_y GJ + \left(\frac{\pi}{K_z L_s} \right)^2 EI_y EC_w} \quad (2.10)$$

Pour des conditions d'encastrement aux deux extrémités ($\beta = \beta' = 0$), les valeurs de K_y et de K_z sont de 0,5 (Picard et Beaulieu, 1991). D'autres valeurs pour différents cas de retenue aux extrémités se retrouvent dans l'ouvrage de Chen et Lui (1987).

Une autre façon d'inclure les cas de retenues et de chargement différents est de multiplier le moment de déversement fondamental (équation 2.9) par un coefficient qui tient compte de ces deux aspects. Un tel coefficient a été développé pour une poutre simplement appuyée ou encastrée à ses deux extrémités et soumise à une charge constante ou à une charge ponctuelle à mi-portée (Nethercot, 1983). L'auteur y a également inclus l'influence de la position de la charge par rapport au centre de torsion.

Le diagramme de moment auquel la poutre est soumise vient donc modifier le comportement de cette dernière. La méthode de Nethercot résout certains cas de chargements. L'approche préconisée par la norme CSA-S16.1 est d'appliquer un coefficient ω_2 au moment obtenu de l'équation 2.9. Ce coefficient est obtenu d'analyses numériques car une solution analytique n'est généralement pas disponible. On pourra se référer à l'ouvrage de Picard et Beaulieu (1991) pour l'établissement des différentes valeurs de ω_2 . Précisons toutefois que la norme S16.1 prescrit l'utilisation d'une valeur de $\omega_2=1$ dès que le moment fléchissant maximal est plus grand que le moment fléchissant aux supports latéraux.

2.1.3 Formulation de Winter et Thürliman

L'équation 1.9 de Winter et Thürliman (AREA, 1988) est dérivée de l'équation de Timoshenko. De l'équation 2.9, on peut obtenir:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow M_{ue} = \sqrt{\frac{\pi^2 EI_y EJ}{2L_s^2(1+\nu)} + \frac{\pi^4 EI_y EC_w}{L_s^4}} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} f_{cr} &= \frac{M_{ue} d}{I_x} = M_{ue} \sqrt{\frac{d^2}{4I_x}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi^2 E^2 I_y J d^2}{8L_s^2 I_x^2 (1+\nu)} + \frac{\pi^4 E^2 I_y C_w d^2}{4L_s^4 I_x^2}} \\ &= \sqrt{\frac{E^2 \pi^4 d^4}{4L_s^4} \left(\frac{I_y J L_s^2}{2\pi^2 d^2 I_x^2 (1+\nu)} + \frac{I_y C_w}{I_x^2 d^2} \right)} \\ &= \sqrt{\left[\frac{E\pi^2}{2(L_s d)^2} \right]^2 \left[\frac{J I_y}{2(1+\nu) I_x^2} \left(\frac{L_s}{\pi d} \right)^2 + \left(\frac{I_y^2}{4I_x^2} \right) \left(\frac{4C_w}{I_y d^2} \right) \right]} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Or, en négligeant l'épaisseur des de sorte que $(d-t) \approx d$,

$$C_w \approx \frac{I_y d^2}{4} \Rightarrow \frac{4C_w}{I_y d^2} \approx 1 \quad (2.13)$$

et donc, en intervertissant les deux termes de l'addition, on obtient:

$$f_{cr} = \left\{ \left[\frac{E\pi^2}{2(L_s d)^2} \right]^2 \left(\frac{I_y}{2I_x} \right)^2 + \left[\frac{E\pi^2}{2(L_s d)^2} \right]^2 \left(\frac{J I_y}{2(1+\nu) I_x^2} \right) \left(\frac{L_s}{\pi d} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (2.14)$$

ce qui correspond à l'équation 1.9, équation qui sert de base au calcul du déversement dans le calcul des contraintes admissibles de la norme de l'AREA.

2.1.3.1 Formulation de l'AREA

L'équation de Winter et Thürliman (équation 2.14) peut être vue sous la forme suivante:

$$f_{\sigma} = \sqrt{\sigma_{sv}^2 + \sigma_w^2} \quad (2.15)$$

où σ_{sv} est la contrainte résultant de la torsion pure et σ_w est la contrainte résultant du gauchissement. La contrainte f_{σ} sera nécessairement plus grande que σ_w et plus grande que σ_{sv} . Le calcul sera du côté sécuritaire si on choisit la contrainte maximale admissible non pas en fonction de l'addition des deux contraintes mais bien en fonction de la plus grande des deux. Ainsi, on s'assurera que si, sous certaines conditions particulières, on ne pouvait mobiliser la pleine rigidité en torsion due à la torsion pure ou la pleine rigidité en torsion due au gauchissement, la contrainte maximale admissible serait tout de même correcte.

Ainsi, si on néglige σ_{sv} :

$$f_{\sigma} = \sigma_w = \frac{E\pi^2}{2\left(\frac{L_s}{d}\right)^2} \left(\frac{I_y}{2I_x}\right) = \frac{E\pi^2}{2\left(\frac{L_s}{d}\right)^2} \left(\frac{r_y^2}{2r_x^2}\right) \quad (2.16)$$

de plus, si on assume que $r_x \approx 0,4d$ pour une poutre en I (AREA, 1988), ce qui correspond à la situation où environ la moitié de l'acier se retrouve au niveau de l'âme, on a:

$$f_{\sigma} = \sigma_{*} = \frac{E\pi^2 d^2}{2L_s^2} \frac{r_v^2}{2(0,4d)^2} = \frac{E\pi^2}{0,64 \left(\frac{L_s}{r_v} \right)^2} \quad (2.17)$$

Avec un module d'Young de 200000 MPa , la contrainte critique devient (en MPa) :

$$f_{\sigma} = \frac{3,08 \times 10^6}{\left(\frac{L_s}{r_v} \right)^2} \quad (2.18)$$

Comme pour la plastification, la norme utilise alors un facteur de sécurité de 0,55 sur la contrainte pour obtenir la contrainte maximale admissible. Cela nous donne:

$$\sigma_{adm} = \frac{1,70 \times 10^6}{\left(\frac{L_s}{r_v} \right)^2} \quad (2.19)$$

qui est la contrainte admissible maximale pour un matériau parfaitement élastique.

Pour tenir compte du phénomène de plastification, la norme de l'AREA utilise une courbe parabolique de la forme :

$$F = A - B \left(\frac{L_s}{r_v} \right)^2 \quad (2.20)$$

qui passe par la contrainte maximale admissible de plastification ($0,55 F_y$) pour un élancement (L_s/r_v) nul et qui est tangente à la contrainte trouvée pour un matériau

élastique pour un élancement de 157 (figure 2.2). Cet élancement est l'élancement maximal permis par la norme pour la partie en compression d'une pièce fléchie. La contrainte maximale admissible élastique n'est donc pas utilisée. L'équation prescrite est ainsi :

$$\sigma_{adm} = 0,55F_y - \frac{0,55F_y^2}{85700} \left(\frac{L_s}{r_v} \right)^2 \quad (2.21)$$

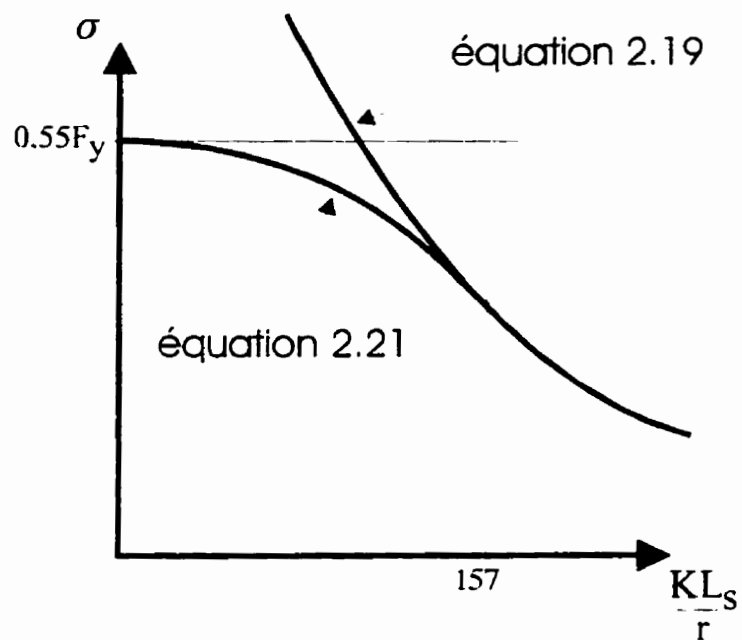


Figure 2.2 : Courbe de calcul selon l'équation 2.20

Si, par contre, on néglige σ_w ,

$$f_{cr} = \sigma_{sv} = \frac{E\pi^2}{2\left(\frac{L_s}{d}\right)^2} \left(\sqrt{\frac{Jl_y}{2(1+\nu)I_x^2}} \right) \left(\frac{L_s}{\pi d} \right) \quad (2.22)$$

En négligeant la contribution de l'âme à la rigidité de la poutre, on obtient les caractéristiques géométriques suivantes:

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{2}{3}bt^3 \\
 I_y &= 2\frac{tb^3}{12} = \frac{tb^3}{6} \\
 I_x &= 2bt\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{btd}{2} \\
 A_f &= bt
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

En posant les mêmes propriétés de l'acier ($E=200000$ MPa, $\nu=0,3$) , on obtient:

$$f_\sigma = \frac{130000}{L_s d \cdot A_f} \tag{2.24}$$

On incorpore le facteur de sécurité sur la contrainte de 0,55, ce qui nous donne:

$$\sigma_{adm} = \frac{72000}{L_s d \cdot A_f} \tag{2.25}$$

La norme ne spécifie pas pour ce cas, de courbe de transition élasto-plastique. La valeur de la contrainte admissible est simplement limitée par la contrainte de plastification qui est de $0,55 F_y$.

La contrainte maximale admissible (en MPa) sera donc la plus grande des valeurs obtenues des équations 2.21 et 2.25 sans excéder $0,55F_y$.

Notons au passage que, pour des poutres assemblées par rivets plutôt que par soudures, on ne pourra pas utiliser la deuxième équation. En effet, des tests ont démontré que le glissement des rivets vient modifier considérablement la résistance due à la torsion pure (AREA, 1988). La norme préfère, dans ce cas, se fier uniquement à la résistance causée par le gauchissement.

2.1.4 Formulation dans la norme S16.1

Les normes S6 et S16.1 utilisent un calcul direct du moment de déversement élastique M_{cr} . Ce moment sert ensuite à se positionner le long d'une courbe de calcul qui, elle, tient compte de la plastification. Ces deux normes utilisent l'équation de Timoshenko en y ajoutant un terme ω_2 tel que présenté à la section 2.1.2.

$$M_{ue} = \frac{\omega_2 \pi}{L_s} \sqrt{EI_y GJ + \left(\frac{\pi}{L_s}\right)^2 EI_y EC_w} \quad (2.26)$$

2.2 Modèle du poteau sur supports élastiques

Outre l'analyse classique du déversement que nous venons de voir, un modèle de poteau sur appuis élastiques est proposé par plusieurs auteurs (Bleich, 1952; Hope et Lee, 1964). La plupart de ces modèles ont toutefois été conçus pour résoudre le problème des ponts à tablier inférieur en treillis (pony truss). Ce type de pont, moins

courant de nos jours, a ainsi servi de prototype pour le développement de théories et de procédures qui n'ont été étendues que plus tard aux poutres à âme pleine.

Pour les treillis, ce modèle est tout naturel puisque la corde supérieure du treillis est bel et bien un poteau-poutre. Ce poteau-poutre est supporté latéralement par les membrures verticales et diagonales du treillis qui sont elles-mêmes rattachées au diaphragme que forme le tablier. L'ensemble se comporte latéralement comme un cadre dont la rigidité latérale assure la stabilité de la corde supérieure.

Le comportement du poteau-poutre se situe entre deux extrêmes. Si les appuis élastiques sont très rigides, le poteau-poutre va flamber entre ces appuis (figure 2.3a). La longueur de flambement sera la distance entre les appuis latéraux. Si, par contre, les appuis sont très flexibles, le flambement se fera sur toute la longueur de la poutre (figure 2.3b) selon une demi-longueur d'onde de forme sinusoïdale (en supposant que les extrémités du poteau ne sont pas libres de se déplacer). Entre ces deux extrêmes, le poteau flambera selon un nombre de demi-longueur d'onde supérieur à l'unité mais inférieur aux nombres d'espace entre les appuis toujours en supposant des extrémités fixes (figure 2.3c).

Johnston (1976) affirme que ce modèle, développé pour la corde supérieure d'un treillis, est applicable à une poutre à âme pleine. Il recommande alors d'inclure dans le poteau-poutre que forme la semelle supérieure le tiers de la zone comprimée de l'âme de la poutre.

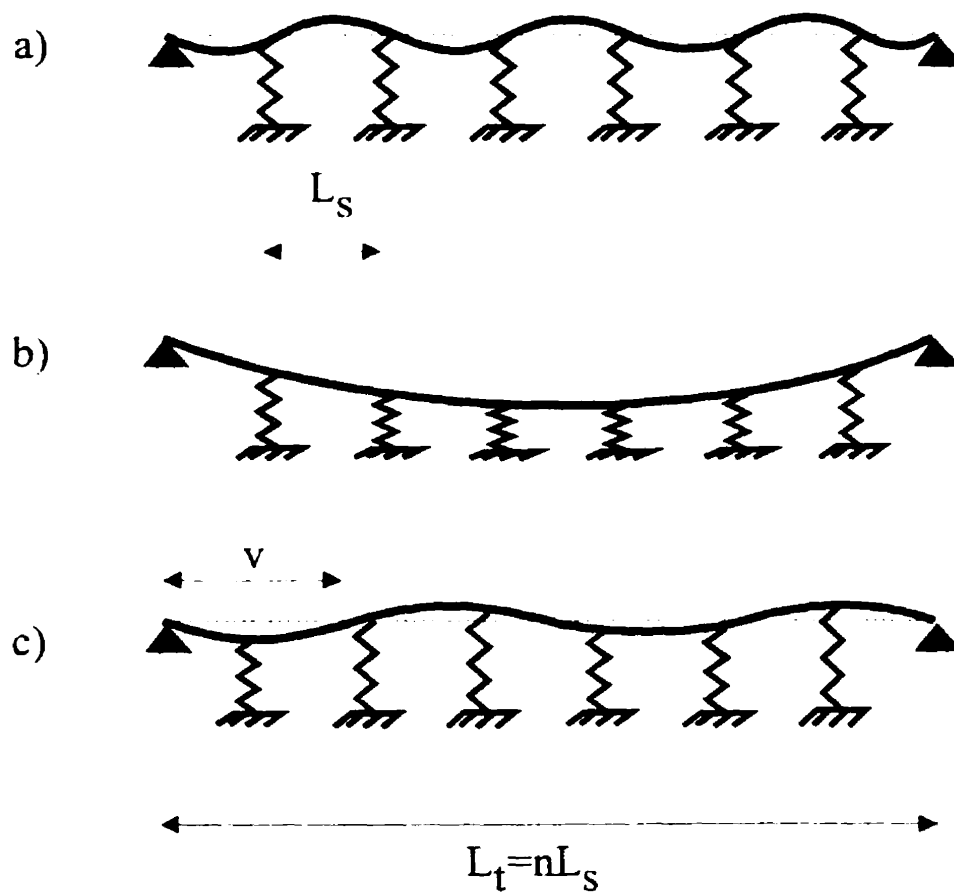


Figure 2.3 : Flambement d'un poteau sur supports élastiques

En fonction des hypothèses simplificatrices posées, ce problème peut être résolu par des solutions plus ou moins complexes. On peut séparer ces solutions en deux groupes. Dans le premier groupe, nous retrouverons des solutions qui sont directement applicables par l'ingénieur dans le cadre de la conception ou de l'évaluation d'une structure. Dans le deuxième groupe, on peut regrouper plusieurs solutions dont l'application à des cas réels est très difficile. Dans ces méthodes, il faudra soit établir un

système d'équations à résoudre par la suite, soit utiliser une méthode de relâchement qui approchera, d'une itération à l'autre, la charge critique recherchée.

Nous ne nous attarderons pas sur le deuxième groupe. En effet, avec la disponibilité des outils informatiques actuels, ces méthodes n'ont plus leurs raisons d'être. Quitte à utiliser un ordinateur, l'ingénieur prendra plutôt une méthode générale qui lui permettra de résoudre une multitude de problèmes (i.e. les éléments finis). Cette façon de faire évitera, en utilisant un même logiciel, d'avoir à reprogrammer à chaque fois une méthode spécifique qui comporte, de plus, un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. Les temps de calcul étant à toutes fins pratiques minimales, la méthode la plus générale sera donc utilisée même si elle est la plus lourde au niveau du nombre de calculs.

Nous nous contenterons donc de revoir les méthodes qui sont directement utilisables par l'ingénieur. On pourra retrouver un recueil plus exhaustif des méthodes établies dans l'ouvrage de Hope et Lee (1964).

2.2.1 Approche de Engesser

Le premier à traiter le problème fut Engesser en 1884 (Bleich, 1952). L'équation qu'il développa donne la rigidité requise des ressorts afin que le poteau atteigne une certaine charge critique de compression. Les hypothèses qu'il posa sont les suivantes:

1. Le poteau est de section constante.

2. Le poteau est soumis à une charge de compression uniforme.
3. À ses extrémités, le poteau est rotulé et est retenu par des supports fixes.
4. Les supports intermédiaires sont des ressorts de rigidité constante et sont également espacés.
5. Les supports élastiques sont suffisamment nombreux pour être remplacés par une fondation élastique.

Avec ces hypothèses, Engesser supposa une déformée de la forme d'un sinus et arriva à l'équation suivante:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{v^2} + \frac{C v^2}{\pi^2 L_s} \quad (2.27)$$

P_{cr} : charge de flambement;

E_t : module tangent du matériau;

I : inertie du poteau;

C : rigidité des ressorts;

L_s : distance entre les ressorts;

v : demi-longueur d'onde du mode de flambement.

La charge de flambement est ainsi fonction du mode de flambement. Lorsque v augmente, la première partie de l'équation 2.27 diminue alors que la deuxième partie augmente. La charge critique sera minimale pour $\partial P / \partial v = 0$, ce qui nous permet de trouver le mode de flambement:

$$\frac{-2\pi^2 E_t I}{v^3} + \frac{2Cv}{\pi^2 L_s} = 0$$

$$v = \pi^4 \sqrt{\frac{E_t I L_s}{C}}$$
(2.28)

En introduisant la valeur de v dans l'équation 2.27, on peut alors trouver la relation entre la rigidité requise des ressorts et la charge que supporte le poteau. La rigidité requise des ressorts sera notée C_{req} . Pour une charge donnée P , elle sera:

$$C_{req} = \frac{P^2 L_s}{4E_t I}$$
(2.29)

Pour éviter d'avoir recours au module tangent dans l'évaluation de la résistance réelle du poteau, on peut utiliser les courbes de résistance avec le cheminement suivant:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{(KL_s)^2} \Rightarrow E_t I = \frac{P_{cr} (KL_s)^2}{\pi^2}$$
(2.30)

On substitue alors $E_t I$ dans l'équation 2.29 et en utilisant P au lieu de P_{cr} , on obtient:

$$C_{req} = \frac{\pi^2 P}{4K^2 L_s}$$
(2.31)

La procédure à suivre est alors la suivante: tout d'abord calculer la contrainte agissant dans le poteau $\sigma = P/A$ que l'on multiplie par le facteur de sécurité pour obtenir la contrainte ultime σ_u . De cette contrainte ultime, on trouvera, sur la courbe de résistance

appropriée, l'élancement KL/r correspondant (figure 2.4), duquel on déduira la valeur de K , à partir des dimensions et ainsi du rayon de giration (r) du poteau.

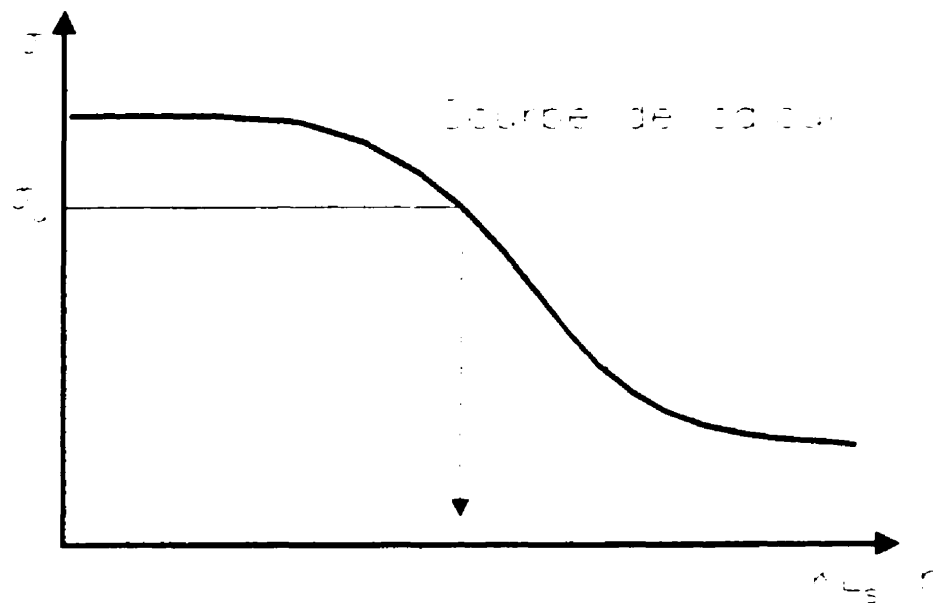


Figure 2.4 : Utilisation des courbes de calcul

Cette solution a été vérifiée expérimentalement par Engesser pour un poteau de section rectangulaire supporté élastiquement. Les résultats furent concordants pour une demi-longueur d'onde (v) supérieure à $1,8L_1$, ce qui correspond à une valeur de K de 1,3. Pour des valeurs inférieures à ces limites, l'hypothèse de la fondation continue n'est plus valide. Cette limitation à la méthode sera discutée plus en détails à la sous-section 2.2.4.

2.2.2 Approche de Timoshenko (fondation élastique)

En utilisant une approche énergétique, Timoshenko (1947) résolut le problème d'Engesser du poteau sur fondation élastique à extrémités fixes. En supposant le mode

de flambement comme étant une sommation de fonction sinusoïdales, il arriva à l'équation suivante:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{L_T^2} \left(m^2 + \frac{C' L_T^4}{m^2 \pi^4 E_t I} \right) \quad (2.32)$$

L_T : longueur totale du poteau.

C' : module de fondation $= C/L_s$. (L_s = distance entre les ressorts)

m : nombre de demi-longueurs d'onde au flambement.

La charge critique de flambement correspond à la valeur de m qui minimise P_{cr} .

On peut évaluer le nombre de demi-longueurs d'ondes (m) par l'équation suivante:

$$\frac{C' L_T^4}{\pi^4 E_t I} = m^2 (m + 1)^2 \quad (2.33)$$

Timoshenko prévient le lecteur que cette équation n'est pas valide pour une demi-longueur d'onde plus courte que trois segments (voir sous-section 2.2.4).

Une autre façon d'exprimer la charge critique est d'utiliser une expression de la forme de l'équation d'Euler.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{(K_1 L_T)^2} \quad (2.34)$$

où K_1 est un coefficient de longueur de flambement appliqué à L_T .

Timoshenko présente alors un tableau donnant K_1 en fonction de $D=C'L_T^4/16E_tI$.

Tableau 2.1 : Facteur K_1 en fonction de D

D	0	1	3	5	10	15	20	30	40	50	75	100
K_1	1	0,927	0,819	0,741	0,615	0,537	0,483	0,437	0,421	0,406	0,376	0,351
D	200	300	500	700	1000	1500	2000	3000	4000	5000	8000	10000
K_1	0,286	0,263	0,235	0,214	0,195	0,179	0,165	0,149	0,140	0,132	0,132	0,110

L'approche de Timoshenko donne des résultats similaires à celle d'Engesser. La figure 2.5 nous montre la relation entre D , qui représente la rigidité fournie par les ressorts, et le coefficient de longueur effective K_1 . Le coefficient K_1 est tiré du tableau 2.1. Pour l'équation de Bleich, le coefficient K_1 (qui ne correspond pas à K) est trouvé de la façon suivante, à partir de l'équation 2.29:

$$\begin{aligned}
 P &= \sqrt{\frac{4E_tIC}{L_s}} = \sqrt{4E_tIC'} \\
 &= \frac{\pi^2 E_t I}{L_T^2} \sqrt{\frac{4E_tIC'L_T^4}{\pi^4 E_t^2 I^2}} = \frac{\pi^2 E_t I}{L_T^2} \sqrt{\frac{64}{\pi^4}} D \\
 &= \frac{\pi^2 E_t I}{K_1^2 L_T^2} \Rightarrow K_1 = \left(\frac{64}{\pi^4} D \right)^{-1/4}
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

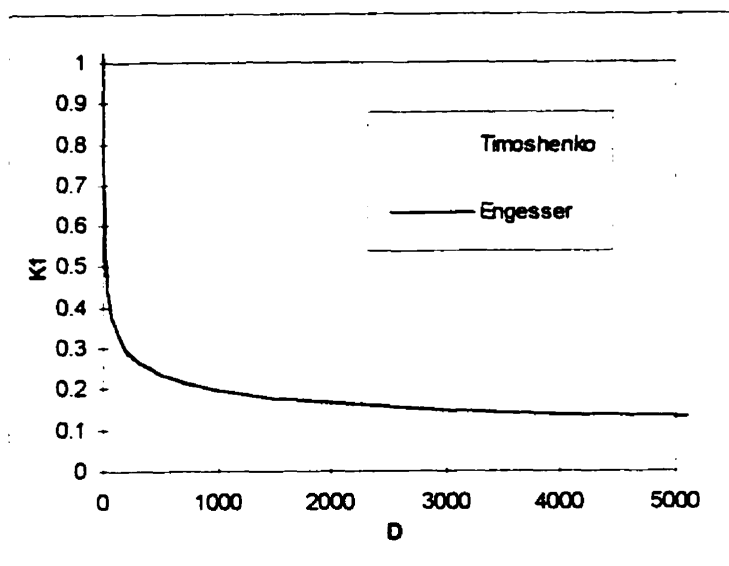


Figure 2.5 : Comparaison des résultats de Timoshenko et Engesser

On peut voir que les deux méthodes donnent des résultats à toutes fins pratiques identiques puisqu'on ne peut même pas distinguer les deux courbes. L'erreur maximale entre les deux équations est de 8% et est probablement due aux arrondis inévitables rencontrés dans toute information présentée sous forme de tableaux.

2.2.3 Approche de Bleich (extrémités fixes)

En 1919, Bleich résolut le même problème qu'Engesser avec les mêmes hypothèses (Bleich, 1952). Il ne considéra toutefois pas les ressorts comme une fondation continue. Il subdivisa le poteau en segments compris entre les ressorts et posa l'équation dite des trois moments à chaque support. Il en résulta un système formé de

deux équations de différences finies du deuxième ordre. Ce système peut être résolu comme un système d'équations différentielles pour obtenir la relation suivante:

$$C = \left(\frac{2P_{\sigma}}{L_s} \right) \frac{a \left[1 - \cos \left(\frac{m\pi}{n} \right) \right] - b}{1 - \frac{b}{1 - \cos \left(\frac{m\pi}{n} \right)}} \quad m = 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (2.36)$$

$$a = \frac{\phi}{\phi - \sin \phi} \quad (2.37)$$

$$b = \frac{\phi(1 - \cos \phi)}{\phi - \sin \phi} \quad (2.38)$$

$$\phi = L_s \sqrt{\frac{P}{E_s I}} = \frac{\pi}{K} \quad (2.39)$$

n : nombre de segments.

On choisira la valeur de m qui maximise la rigidité requise C . En posant $\partial C / \partial m = 0$, on peut alors obtenir la relation:

$$1 - \cos \left(\frac{m\pi}{n} \right) = b \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{a}} \right) \quad (2.40)$$

La procédure à suivre recommandée par Bleich pour trouver la valeur de m adéquate est alors:

1. Avec l'équation 2.40, évaluer les deux valeurs de $(1 - \cos m\pi/n)$.
2. Choisir les deux entiers m qui donneront les valeurs $(1 - \cos m\pi/n)$ les plus proches.
3. À partir de ces entiers, calculer C . La valeur la plus grande sera la valeur de la rigidité requise (C_{req}).

Le graphique suivant donne la valeur de $CL_s/2P$ en fonction de $\pi/\phi = K$ pour différents nombres de segments.

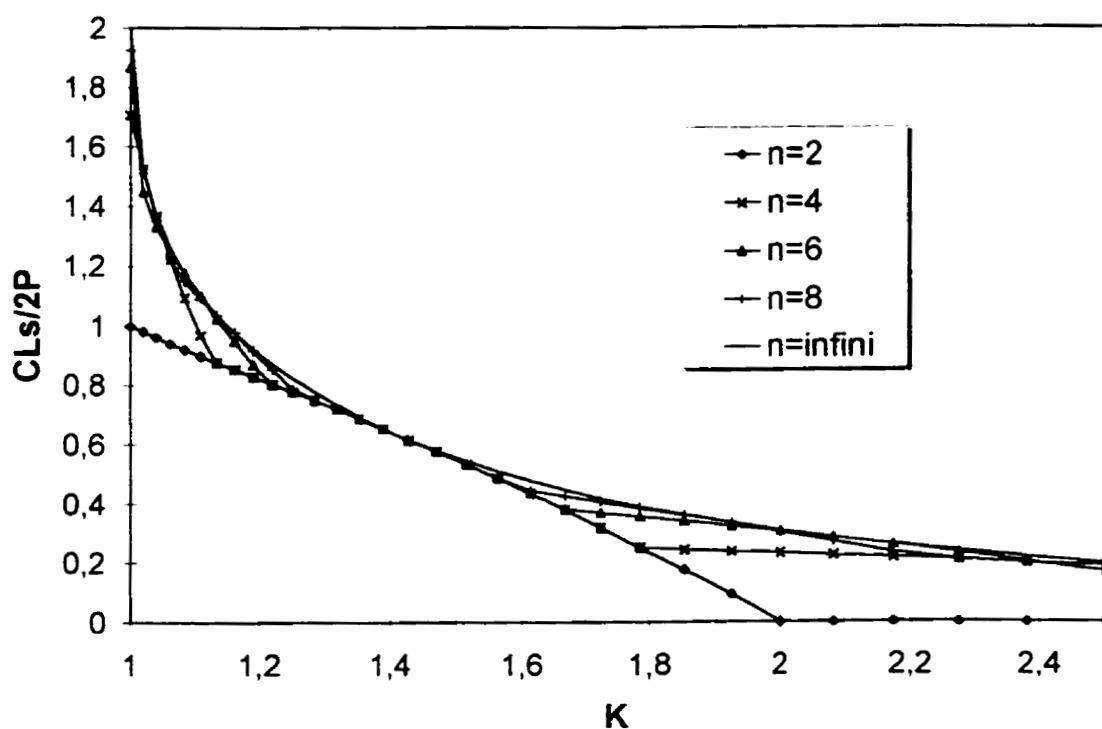


Figure 2.6 : Variation de $CL_s/2P$ en fonction de K pour différentes valeurs de n

On peut y voir que pour un nombre de segments élevé, il est plus simple et assez exact de prendre la valeur conservatrice $n=\infty$. La valeur de $(1-\cos m\pi/n)$ pouvant alors être n'importe quel chiffre compris entre 0 et 2, il n'est plus nécessaire de trouver l'entier le plus près pour la méthode proposée. Bleich propose d'utiliser cette approximation lorsque le nombre de segments est supérieur à 6, l'erreur alors engendrée étant de moins de 1%.

La valeur de C requise pour $n=\infty$ peut alors être écrite sous la forme:

$$C_{req} = \frac{2P}{L_s} \frac{\phi(1 - \cos \phi)}{(\sqrt{\phi} + \sqrt{\sin \phi})^2} = \frac{2P}{L_s} \Phi \quad (2.41)$$

Bleich propose alors un tableau qui donne la valeur de Φ en fonction du paramètre $1/K = \phi/\pi$.

Tableau 2.2 : Valeurs de Φ en fonction de $1/K$

1/K	Φ	1/K	Φ	1/K	Φ	1/K	Φ
0,30	0,111	0,50	0,309	0,70	0,614	0,90	1,102
0,32	0,126	0,52	0,335	0,72	0,652	0,91	1,138
0,34	0,142	0,54	0,361	0,74	0,692	0,92	1,177
0,36	0,160	0,56	0,388	0,76	0,734	0,93	1,219
0,38	0,179	0,58	0,417	0,78	0,777	0,94	1,264
0,40	0,198	0,60	0,447	0,80	0,822	0,95	1,316
0,42	0,218	0,62	0,478	0,82	0,870	0,96	1,375
0,44	0,239	0,64	0,510	0,84	0,921	0,97	1,444
0,46	0,261	0,66	0,544	0,86	0,976	0,98	1,530
0,48	0,285	0,68	0,578	0,88	1,036	0,99	1,652
						1,00	2,000

2.2.4 Comparaison des méthodes avec extrémités fixes

La figure 2.7 compare les équations de Engesser, Timoshenko et Bleich pour un poteau dont les extrémités sont fixes. Les résultats expérimentaux dus à Engesser (Bleich, 1952) y sont également reproduits pour des valeurs de K inférieures à 1,3. Nous avons mentionné précédemment que l'équation d'Engesser représentait bien les résultats expérimentaux pour des valeurs de K supérieures à 1,3.

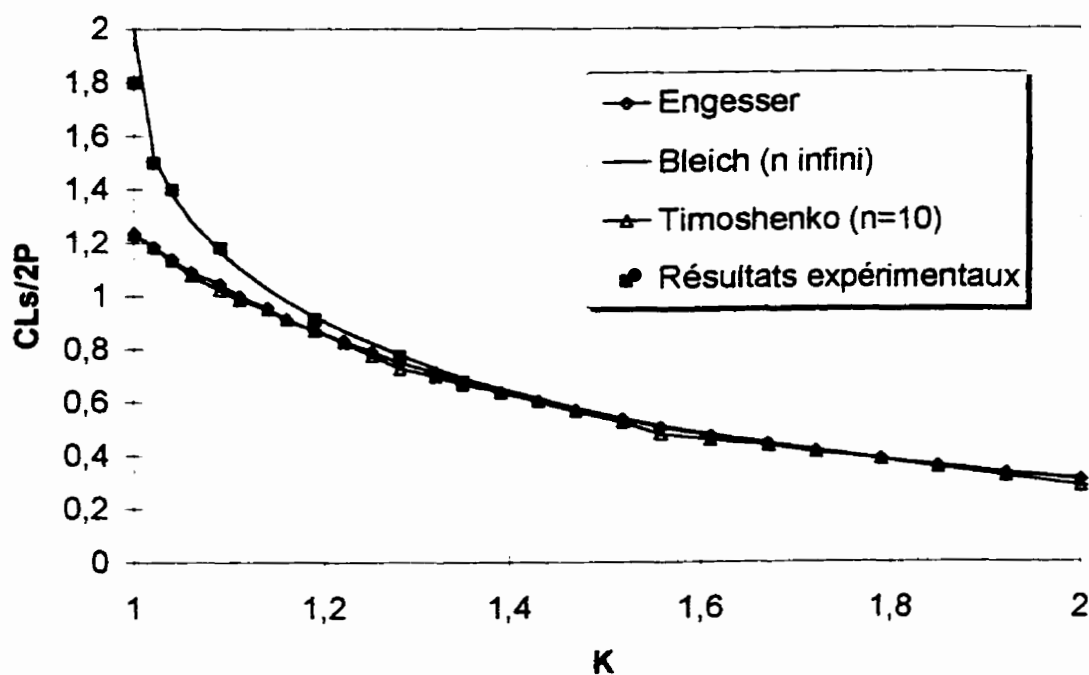


Figure 2.7 : Comparaison des méthodes de Engesser, Bleich et Timoshenko pour un poteau à extrémités fixes

Comme précédemment, l'équation de Timoshenko et celle d'Engesser correspondent très bien. Ces deux approches donnent par contre une réponse non-

sécuritaire par rapport à l'approche de Bleich. De plus, les résultats expérimentaux obtenus d'Engesser, qui imposèrent une limite d'applicabilité à son équation de $K \geq 1,3$, s'ajustent parfaitement aux résultats de Bleich.

Les équations de Timoshenko et d'Engesser donnent par ailleurs des valeurs de $CL/2P$ inférieures aux résultats expérimentaux et donc non-sécuritaires. L'erreur engendrée diminue avec l'augmentation de la longueur effective. Plus les supports seront rigides, plus grande sera l'erreur. L'utilisation des équations de Timoshenko et d'Engesser est correcte pour de faibles rigidités des ressorts ($CL/2P < 0,6$), ce qui correspond à de grandes longueurs effectives ($K > 1,3$). Pour un poteau mieux retenu, il faut prendre l'équation de Bleich.

2.2.5 Approche de Timoshenko (charge parabolique)

En utilisant le modèle de la fondation élastique pour un poteau d'inertie constante à extrémités fixes, Timoshenko raffina ses résultats en utilisant une charge de compression de forme parabolique. Cette charge correspond à celle produite dans la corde supérieure d'un treillis pour un chargement uniforme sur celui-ci.

Par l'approche énergétique, il arriva au résultat suivant:

$$Q_{cr} = \left(\frac{P_{cr} L_T}{4} \right) = \frac{\pi^2 E_r I}{K_z L_T} \quad (2.42)$$

Q_{cr} = charge critique constante;

K_2 = coefficient de longueur de flambement, appliqué à L_T ;

La valeur de K_2 est alors obtenue du tableau suivant en fonction de $D=C'L^4/16E_I I$:

Tableau 2.3 : Valeurs de K_2 en fonction de D

D	0	5	10	15	22,8	56,5	100	162,8	200	300	500	1000
K_2	0,696	0,524	0,443	0,396	0,363	0,324	0,290	0,259	0,246	0,225	0,204	0,174

On peut comparer graphiquement la valeur de K_2 (charge parabolique) à celle de K_1 (charge constante).

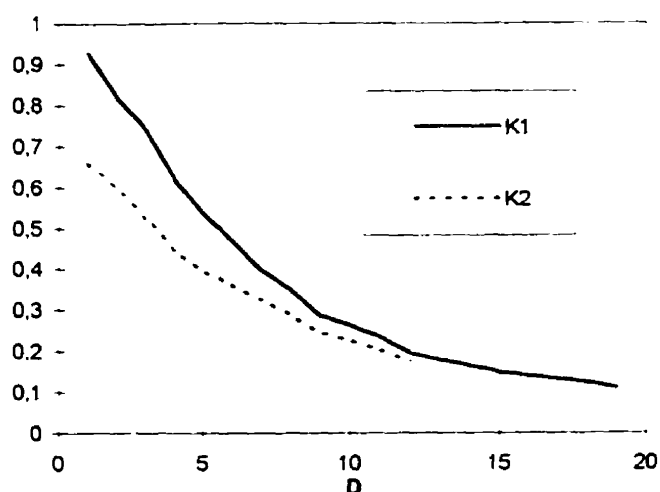


Figure 2.8 : Chargement parabolique et chargement continu par Timoshenko

La charge de flambement sera toujours plus faible pour une charge constante que pour une charge parabolique (une différence maximale de l'ordre de 40%). La différence entre les deux types de chargement s'atténuera toutefois avec l'augmentation de la

rigidité des supports. En effet, plus les supports seront rigides, plus la longueur effective du poteau diminuera. Or, la variation de la charge sera plus faible pour une courte longueur effective que pour une longueur effective plus grande. Ainsi, pour des supports très rigides, le poteau se comportera comme une suite de poteaux indépendants soumis chacun à une charge uniforme et le segment central sera soumis à la charge maximale. La charge critique étant la charge qui fera flamber le segment le plus sollicité, la variation du chargement perd donc son influence.

2.2.6 Approche de Schweda

En 1928, Schweda aborda le problème pour éliminer l'hypothèse des supports d'extrémité rigides (Bleich, 1952). Il utilisa comme modèle un poteau rotulé à ses extrémités et prolongé, à chaque extrémité, par un segment de longueur d , lui-même simplement appuyé à son extrémité éloignée. Le poteau est retenu par des ressorts intermédiaires de rigidité C et les rotules sont retenues par des ressorts de rigidité C_e (figure 2.9).

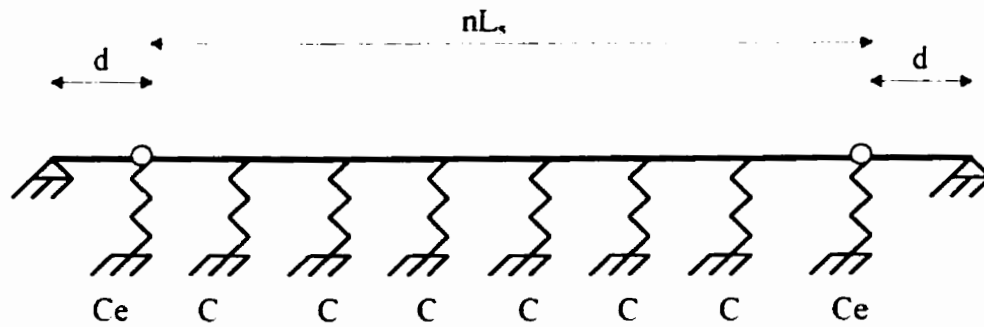


Figure 2.9 : Modèle de Schweda

La partie centrale est soumise à une charge P et les segments ajoutés à une charge P_d . Comme les supports d'extrémité ne sont pas rigides, la rigidité des supports intermédiaires devra être augmentée pour que le poteau puisse résister à la même charge que celle obtenue en considérant les extrémités fixes. Pour ce faire, la rigidité des supports intermédiaires sera majorée par un coefficient c qui vient multiplier la rigidité requise pour un modèle à extrémités fixes (C_0).

$$C = c \cdot C_0 \quad (2.43)$$

En utilisant cette valeur cC_0 pour les supports intermédiaires, Schweda exprima la rigidité requise pour les ressorts d'extrémité (C_e).

$$C_e = \frac{P_d}{d} + \Psi C_0 \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned}
\Psi &= \frac{4K^2}{\pi^2 c} \left(1 - \frac{1}{2u \cosh(\alpha n) \pm \cos(\beta n)} \left\{ m \left[\sinh \alpha(n-1) \sin \beta \pm \sinh \alpha \sin \beta(n-1) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2u \left[\cosh \alpha(n-1) \cos \beta \pm \cos \beta(n-1) \cosh \alpha \right] \right\} \right) \\
m &= 2(s-2) + c \frac{\phi^2}{4} \\
u &= \sqrt{t-s^2} \\
s &= \frac{1}{2} \left[1 + \cos \phi - c \frac{\phi}{8} (\phi - \sin \phi) \right] \\
t &= \left(1 - c \frac{\phi^2}{8} \right) \cos \phi + c \frac{\phi}{8} \sin \phi \\
\phi &= \frac{\pi}{K} \\
2 \cosh \alpha &= \sqrt{(s+1)^2 + u^2} + \sqrt{(s-1)^2 + u^2} \\
2 \cos \beta &= \sqrt{(s+1)^2 + u^2} - \sqrt{(s-1)^2 + u^2}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Cette équation étant valide seulement pour $K > 1,2$, on pourra utiliser pour le calcul de C_0 la rigidité obtenue de l'équation de Engesser.

$$C_0 = \frac{\pi^2 P}{4K^2 L_s} \tag{2.46}$$

La rigidité des supports intermédiaires sera alors:

$$C = cC_0 = c \frac{\pi^2 P}{4K^2 L_s} \tag{2.47}$$

Schweda calcula les valeurs de Ψ en fonction de K et de c pour des treillis à 6, 8, 10 et 12 panneaux, qu'il présenta sous la forme de tableaux. En voici un exemple:

Tableau 2.4 : Valeurs de Ψ en fonction de K pour $n=12$

K	c							
	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
1,2	0,97	0,74	0,62					
1,3	1,06	0,82	0,69					
1,4	1,17	0,92	0,77					
1,5	1,25	0,99	0,84					
1,6	1,41	1,10	0,93	0,80				
1,7	1,54	1,19	1,00	0,87				
1,8	1,60	1,26	1,06	0,92	0,82			
1,9	1,73	1,35	1,12	0,98	0,87			
2,0	1,96	1,49	1,22	1,05	0,93	0,83		
2,1	2,12	1,60	1,30	1,12	0,99	0,88		
2,2	2,17	1,65	1,37	1,17	1,03	0,92	0,84	
2,3	2,12	1,66	1,40	1,20	1,06	0,95	0,87	
2,4	2,28	1,78	1,48	1,27	1,12	1,00	0,91	0,82
2,5	2,57	1,94	1,60	1,36	1,19	1,06	0,96	0,87

Cette approche a été établie pour un treillis à portique oblique (voir figure 2.10). Pour un treillis à portique vertical, certaines considérations permettent de simplifier l'application de la méthode. Ce cas nous intéresse particulièrement puisque les poutres d'un pont à tablier inférieur à âme pleine se rapprochent beaucoup plus du treillis à portique vertical que du treillis à portique oblique.

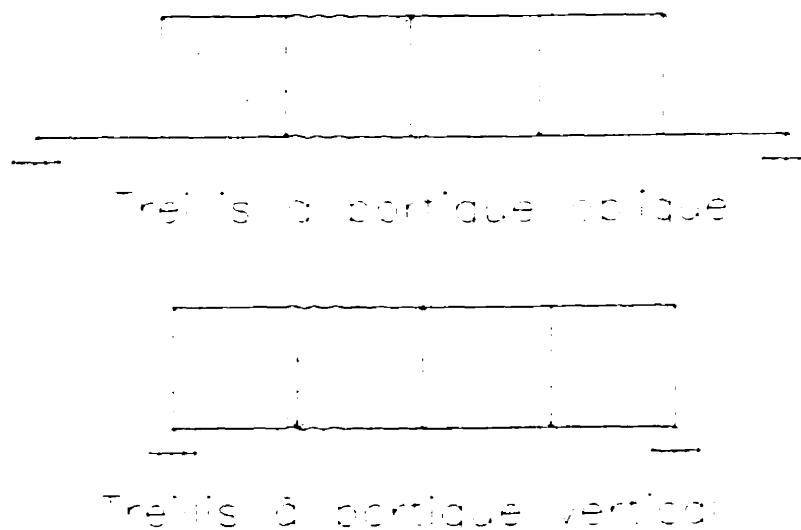
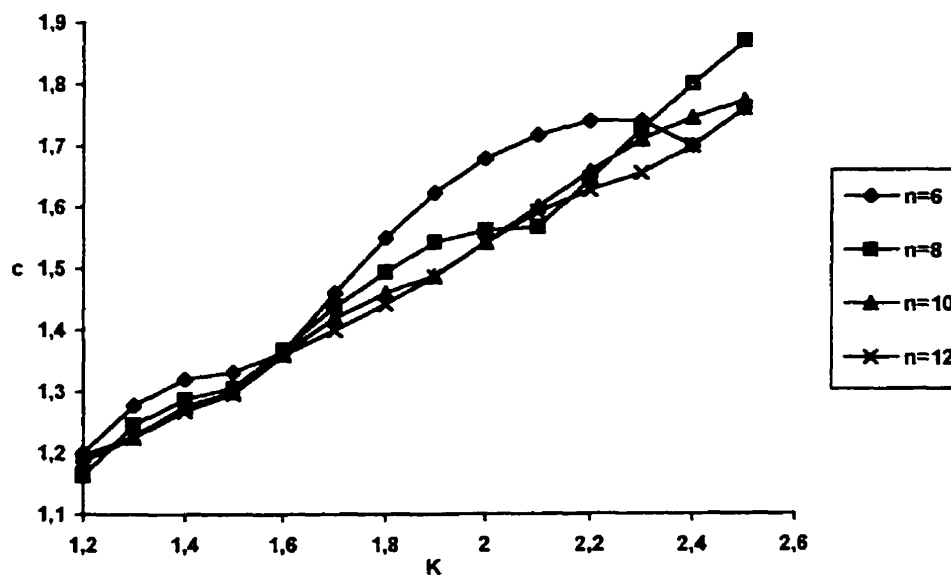


Figure 2.10 : Types de portiques

Pour un treillis à portique vertical, la charge horizontale P_d sera nulle. De plus, la valeur de Ψ sera égale à l'unité, de sorte que $C_e = C_0$ selon l'équation 2.44. La valeur de c pourra alors être déduite des tables de Schweda en ne calculant que la valeur de K . Rappelons ici que cette valeur de K sera déduite d'une courbe de calcul pour tenir compte du comportement plastique du matériau, de ses imperfections initiales et de ses contraintes résiduelles, tel qu'illustré à la figure 2.4. En interpolant dans les tables de Schweda, nous obtenons le tableau et le graphique suivant :

Tableau 2.5 : Interpolation des tableaux de Schweda (treillis à portique vertical)

	c			
K	n=6	n=8	n=10	n=12
1,2	1,200	1,163	1,196	1,187
1,3	1,278	1,246	1,226	1,225
1,4	1,320	1,287	1,275	1,268
1,5	1,332	1,306	1,300	1,296
1,6	1,363	1,367	1,361	1,359
1,7	1,460	1,438	1,420	1,400
1,8	1,550	1,494	1,460	1,443
1,9	1,623	1,543	1,487	1,486
2,0	1,679	1,562	1,542	1,542
2,1	1,717	1,567	1,600	1,592
2,2	1,740	1,645	1,658	1,627
2,3	1,740	1,727	1,710	1,655
2,4	1,700	1,800	1,745	1,700
2,5	1,760	1,870	1,773	1,760

Variation de c en fonction de K pour différents nombres de panneaux**Figure 2.11 : Interpolation des tableaux de Schweda**

2.2.7 Approche de Ratzersdorfer

Le problème de la poutre sur appuis élastiques est un problème qui touche également les ingénieurs aéronautiques. Ratzersdorfer (1945) utilisa la même approche que Schweda (méthode des trois moments menant à une équation de différences finies) pour un poteau sur supports élastiques équidistants à extrémités sur supports élastiques, soit le même problème que Schweda. Il arriva à une solution très semblable et d'une complexité comparable à l'équation obtenue de ce dernier. Pour permettre l'utilisation de ses résultats, il publia des diagrammes de calcul pour un poteau retenu par des supports élastiques pour 2, 4, 6, 8 et 10 espacements de même que pour un nombre infini de supports. Ces courbes donnent l'équivalent du coefficient de longueur effective K en fonction de la rigidité des supports intermédiaires et du ratio entre la rigidité des supports d'extrémité et celle des supports intermédiaires.

Ratzersdorfer fournit ensuite deux tableaux qui correspondent chacun à un cas particulier d'intérêt. Le premier tableau nous donne la valeur de la rigidité nécessaire sous la forme CL/P_{cr} en fonction du nombre de segments et du coefficient $\phi = \pi/K$. Ce tableau s'applique au cas d'un poteau à extrémités fixes.

Tableau 2.6 : Rigidité des supports requise pour un poteau à extrémités fixes

ϕ	CL/P_{cr}					
	n=2	n=4	n=6	n=8	n=10	n= ∞
0,6	0,760	0,760	0,762	0,851	0,884	0,895
0,7	1,230	1,230	1,230	1,230	1,230	1,230
0,8	1,552	1,552	1,552	1,573	1,624	1,644
0,9	1,794	1,936	2,200	2,185	2,149	2,204
0,95	1,899	2,589	2,584	2,589	2,629	2,632
0,975	1,950	2,967	2,785	2,967	2,902	2,968
1,0	2,000	3,414	3,732	3,848	3,902	4,000

Ces valeurs correspondent aux calculs de Bleich pour un poteau à extrémités fixes. Ratzersdorfer considère toutefois que le nombre de segments à partir duquel on peut considérer le nombre de supports comme étant infini est de 10 plutôt que de 6 comme dans l'analyse de Bleich.

Le deuxième tableau est plus intéressant. Il nous donne la valeur de la rigidité requise (CL/P_{cr}) en fonction du nombre de segments et du rapport entre la rigidité des extrémités et la rigidité intermédiaire (C/C) pour le cas où $K=1$ ($\phi=\pi$). Une valeur de K de 1 correspond au cas où tous les supports sont parfaitement efficaces et que le poteau flambe entre ses supports.

Tableau 2.7 : Rigidité requise pour un poteau à extrémités élastiques ($K=1$)

C_0/C	CL/P_{cr}					
	$n=2$	$n=4$	$n=6$	$n=8$	$n=10$	$n=\infty$
1	3,000	3,618	3,802	3,879	3,919	4,000
2	2,500	3,500	3,759	3,860	3,908	4,000
3	2,333	3,468	3,749	3,855	3,906	4,000
4	2,250	3,454	3,744	3,853	3,905	4,000
∞	2,000	3,414	3,732	3,848	3,902	4,000

On pourra remarquer que la valeur limite de CL/P_{cr} tend vers 4 lorsque le nombre de segments augmente. Cette valeur limite de 4 étant une limite supérieure de CL/P_{cr} , il s'agit d'une valeur sécuritaire et de plus, facilement applicable.

2.2.8 Approche de Lazard

En 1943, le français Lazard, ne pouvant être au courant des travaux internationaux à cause de l'occupation de la région de la France où il se trouvait à l'époque, entreprit de résoudre le problème du poteau posé sur appuis élastiques (Lazard, 1946 et Lazard, 1949). Il effectua une étude théorique du problème de même qu'une série de tests qui durèrent de 1943 à 1948, le tout entrecoupé de périodes d'inactivité dues à un manque d'approvisionnement en acier. Dans son étude théorique, il dérivait l'équation du poteau sur appuis élastiques en établissant l'équation différentielle représentant les forces dans le poteau en position déformée lors du flambement. Il trouva une solution exacte pour résoudre le cas particulier de cette équation qui représente un poteau à extrémités fixes. L'équation qu'il présenta est très proche de celle de Bleich. Elles donnent d'ailleurs toutes deux le même résultat lorsque le nombre de supports tend

vers l'infini. Lazard considère d'ailleurs que l'utilisation d'un nombre infini de supports est justifiée lorsque le nombre de supports est supérieur à 6.

$$\frac{CL_s}{P} = \frac{2 \left(1 - \cos \frac{m\pi}{n+1} \right)}{1 + \frac{1 - \cos \frac{m\pi}{n+1}}{\cos \frac{m\pi}{n+1} - \cos \phi} \times \frac{\sin \phi}{\phi}} \quad (2.48)$$

Ne pouvant trouver une solution exacte pour le problème du poteau à extrémités élastiques, il supposa une réponse de la même forme que l'équation précédente et arriva à une solution approximative pour un poteau sur appuis d'extrémité élastiques. Cette solution remplace le numérateur de la fonction par une « valeur efficace » qui est une fonction du nombre de supports et du ratio entre la rigidité des extrémités et celle des supports intermédiaires (C_e/C).

$$\frac{CL_s}{P} = \frac{x_{eff}}{1 + \frac{1 - \cos \frac{p\pi}{n+1}}{\cos \frac{p\pi}{n+1} - \cos \phi} \times \frac{\sin \phi}{\phi}} \quad (2.49)$$

Lazard calcula ces valeurs efficaces pour un nombre de panneaux allant jusqu'à 6. Il présenta ces résultats sous la forme de courbes de calcul. Mentionnons toutefois le cas particulier des supports de rigidité identique ($C_e/C=1$) qui nous amène à une valeur efficace de:

$$x_{eff} = 2 \left(1 - \cos \frac{m\pi}{n+2} \right) \quad (2.50)$$

Lazard publia aussi des résultats exhaustifs de ses expériences et des relations entre ses résultats et les méthodes d'analyse développées à l'époque. Les courbes qu'il publia donnent non seulement la valeur de la charge de flambement mais également le mode de flambement. Les résultats expérimentaux concordèrent bien avec ceux obtenus de sa méthode de même qu'avec celle de Bleich dont il fait l'éloge à plusieurs reprises. De ses résultats, il démontra aussi l'erreur causée par l'utilisation des équations d'Engesser et de Timoshenko qui, comme nous l'avons dit plus tôt, donnent des valeurs non-sécuritaires pour $K < 1,3$.

À partir de ses analyses, Lazard arriva aussi à deux résultats essentiels. Premièrement, il démontra que les supports d'extrémités peuvent être considérés comme rigides du moment où leurs rigidités est supérieure au double de la rigidité des supports intermédiaires ($C_e/C \geq 2$). Deuxièmement, les supports intermédiaires seront absolument efficaces (le flambement se fera entre les supports) dès que leur rigidité atteindra la valeur suivante:

$$C_{eff} = 4\pi^2 \frac{EI}{L_s^3} \quad (2.51)$$

Il s'agit du même critère que celui trouvé implicitement par Ratszerdorfer.

Lazard étudia également l'influence d'une retenue élastique en torsion sur le comportement du poteau. Il ne fit malheureusement cette étude que sur une base expérimentale sans pouvoir expliquer ou synthétiser ses résultats qu'il présente également sur la forme de courbes de résistance. Ces courbes incluent par ailleurs l'essentiel des travaux expérimentaux réalisés dans le monde jusqu'en 1949.

2.3 Modèle de la poutre avec retenue de torsion

Le deuxième modèle proposé par la littérature est celui de la poutre avec retenue de torsion. Ce modèle considère le déversement d'une poutre dont les conditions d'extrémités sont celles que l'on retrouve dans la théorie classique de Timoshenko. À cette poutre est ajouté un ressort qui ne travaille qu'en torsion. Ce ressort ne travaillant qu'en torsion, la position de ce dernier sur la poutre (aile supérieure, aile inférieure ou position intermédiaire) n'a qu'une faible influence sur le déversement (Yura, 1993). Cette influence augmente toutefois dans le cas où les dimensions de la poutre la rendent sujette à la distorsion de la section.

Modèle de la poutre avec ressort torsionnel

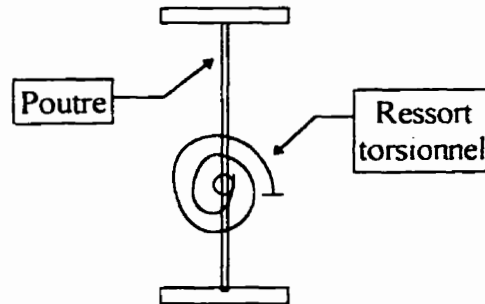


Figure 2.12 : Poutre avec retenue de torsion

2.3.1 Approche de Taylor et Ojalvo

En 1966, les auteurs Taylor et Ojalvo (1966) reprirent l'approche de Timoshenko avec les mêmes conditions frontières et les mêmes hypothèses (appui simple en torsion et en flexion aux extrémités, pas de distorsion de la section, appuis rigides, moment appliqué constant). Ils ajoutèrent à la poutre une retenue torsionnelle continue sur la longueur de la poutre. Ils obtinrent l'équation différentielle suivante:

$$EC_* \frac{\partial^4 \beta}{\partial z^4} - GJ \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} - \left(\frac{M^2}{EI_v} - \frac{\beta_b^*}{L_T} \right) \beta = 0 \quad (2.52)$$

où β_b^* est la somme des rigidités torsionnelles des ressorts. La rigidité torsionnelle de chaque ressort se calcule comme étant le moment nécessaire pour obtenir une rotation unitaire du ressort (M_{br}/θ). Pour des cas pratiques, cette dernière se calcule d'après le schéma suivant:

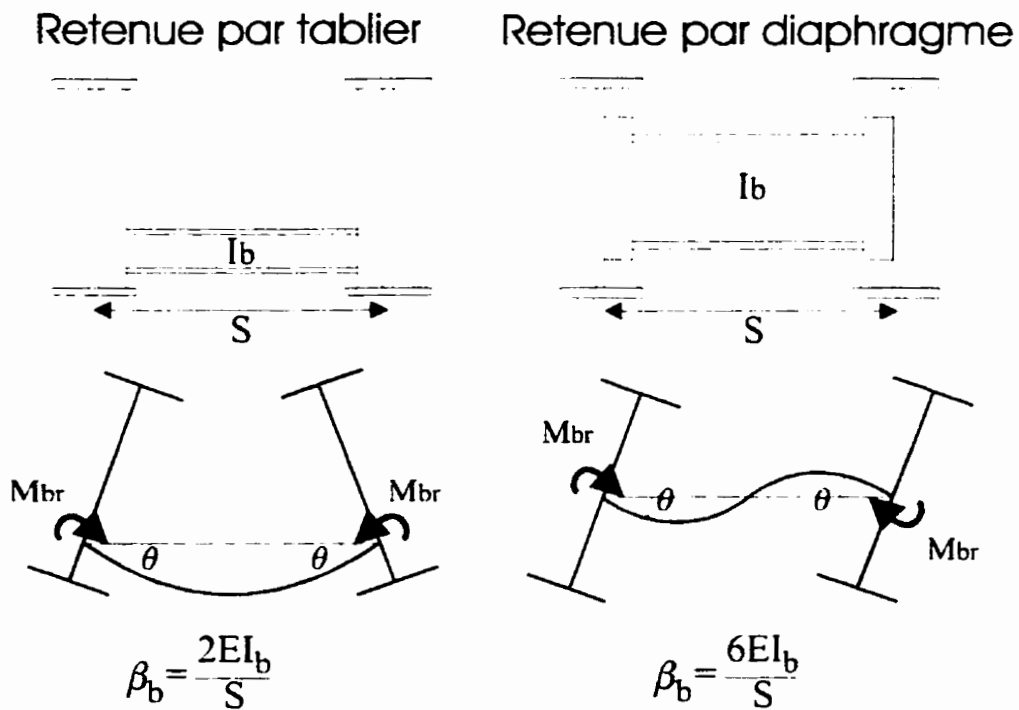


Figure 2.13 : Calcul de la rigidité d'une retenue torsionnelle

La solution de cette équation prend alors la forme suivante:

$$M_{cr}^2 = EI_y GJ \left(\frac{\pi}{L_T} \right)^2 \left[\frac{EC_w}{GJ} \left(\frac{\pi}{L_T} \right)^2 m^4 + m^2 + \frac{\beta_b^* L_T}{\pi^2 GJ} \right] \quad (2.53)$$

On s'aperçoit immédiatement que le moment critique le plus faible sera toujours obtenu pour un nombre de demi-longueurs d'onde (m) égal à 1. Ce résultat très intéressant signifie qu'une poutre retenue en torsion par un milieu continu déversera toujours dans son premier mode. En posant $m=1$, on obtient alors l'équation suivante:

$$M_{\sigma}^2 = EI_y GJ \left(\frac{\pi}{L_T} \right)^2 \left[1 + \frac{EC_w}{GJ} \left(\frac{\pi}{L_T} \right)^2 + \frac{\beta_b^* L_T}{\pi^2 GJ} \right] \quad (2.54)$$

que l'on peut transformer pour retrouver la forme de l'équation de Timoshenko (équation 2.9).

$$M_{\sigma}^2 = \left\{ \left(\frac{\pi}{L_T} \right)^2 \left(EI_y GJ + \left(\frac{\pi}{L_T} \right)^2 EI_y EC_w \right) \right\} + \left\{ \frac{EI_y \beta_b^*}{L_T} \right\} \quad (2.55)$$

En remplaçant la valeur de M_w de l'équation de Timoshenko par M_0 ,

$$M_{\sigma} = \sqrt{M_0^2 + \left(\frac{\beta_b^*}{L_T} \right) EI_y} \quad (2.56)$$

2.3.2 Approche de Yura

En se basant sur les travaux de Taylor et Ojalvo, Yura (1993) entreprend d'inclure le phénomène de la distorsion dans l'analyse. Pour ce faire, il introduit une rigidité torsionnelle efficace qui inclut non seulement la rigidité de la retenue (l'entretoise dans le cas des ponts à tablier inférieur à âme pleine) mais également la rigidité de la section et la rigidité du système global de retenue. Ces systèmes de résistance étant en série, leur combinaison se fait par l'addition de leur flexibilité:

$$\frac{1}{\beta_T} = \frac{1}{\beta_b} + \frac{1}{\beta_{sec}} + \frac{1}{\beta_g} \quad (2.57)$$

β_T : rigidité torsionnelle efficace;

β_b : rigidité torsionnelle de la retenue;

β_{sec} : rigidité de la section de la poutre;

β_g : rigidité du système global de retenue.

Notons ici que la rigidité torsionnelle de la retenue doit inclure (pour notre pont à tablier inférieur à âme pleine) non seulement la rigidité de l'entretoise (β_{ent}) mais également la rigidité de l'assemblage qui relie l'entretoise à la poutre maîtresse (β_{ass}). La rigidité du système global de retenue ne s'applique pas dans notre cas. Cette rigidité est utilisée lorsque les poutres sont reliées entre elles par un diaphragme ou un treillis vertical reliant les ailes supérieures et inférieures des poutres. Ces systèmes induisent des forces verticales dans la poutre retenue. La rigidité β_g vient tenir compte de cet effet qui n'a pas lieu pour une poutre retenue par un tablier inférieur.

L'équation précédente peut être modifiée pour s'appliquer plus spécifiquement à notre problème de pont à tablier inférieur en retirant le terme β_g et en remplaçant β_b par β_{ass} et β_{ent} .

$$\frac{1}{\beta_T} = \frac{1}{\beta_{ent}} + \frac{1}{\beta_{sec}} + \frac{1}{\beta_{ass}} \quad (2.58)$$

Nous avons vu, au point précédent, le calcul de la rigidité de la retenue. Yura (1993) propose l'équation suivante pour le calcul de la rigidité de la section:

$$\beta_{sec} = 3,3 \frac{E}{(h+t)} \left[\frac{1,5(h+t)w^3}{12} + \frac{t_s b_s^3}{12} \right] \quad (2.59)$$

Les dimensions dans cette équation se retrouvent sur la figure 2.14.

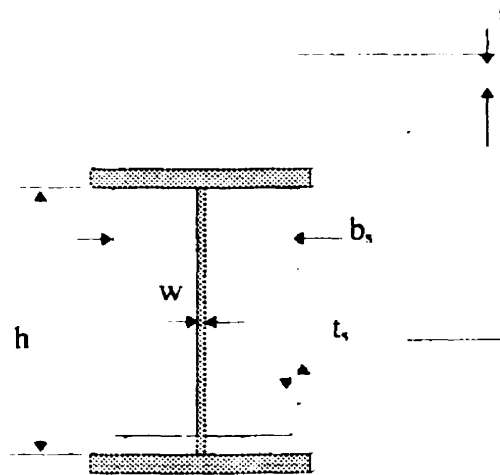


Figure 2.14 : Dimensions à utiliser dans l'équation 2.61

Yura propose également des équations pour calculer la rigidité de section dans le cas de raidisseurs qui ne font pas la profondeur totale de l'âme. Il suggère aussi l'utilisation d'une inertie efficace dans le cas de sections unisymétriques.

Pour rendre son approche plus générale, Yura ajouta à son équation des coefficients pour tenir compte du type de chargement (moment variable, charges en travées, etc) et de la position de la charge par rapport au centre de cisaillement de la poutre. L'équation finale proposée est alors:

$$M_{cr} = \sqrt{C_{bu}^2 M_0^2 + \frac{C_{bb}^2 \left(\beta_T^* L_T \right) EI_v}{C_T}} \quad (2.60)$$

Les facteurs C_b sont l'équivalent du facteur ω_2 utilisé dans la norme S6 (voir section 2.1.3). C_{bu} est le facteur correspondant au diagramme du moment sur la portée alors que C_{bb} correspond au diagramme du moment entre les supports torsionnels. À titre d'information, le facteur C_b vaut 1,0 pour une poutre soumise à un moment constant, 1,13 pour une poutre sous charge constante et 1,35 pour une poutre soumise à une charge ponctuelle au centre de la portée. Le facteur C_T tient compte de la position de la charge. Une charge à l'aile supérieure donnera un C_T de 1,2 alors qu'une charge au centre de gravité de la poutre aura un C_T de 1,0.

La rigidité utilisée (β_T^*) est la somme des rigidités totales de toutes les retenues le long de la poutre. Pour une retenue continue, on prendra la rigidité totale par unité de longueur au lieu de β_T^*/L_T .

CHAPITRE 3

COMPORTEMENT ET COMPOSANTES STABILISATRICES

Dans ce chapitre, nous allons décrire le rôle que devrait jouer chaque composante du pont au niveau de la retenue au déversement. Nous établirons également les critères de dimensionnement qui y sont associés dans la norme de l'AREA. Les fonctions structurales qui seront décrites sont directement extraites des différents ouvrages de référence qui traitent du problème.

3.1 Entretoises

3.1.1 Critères de dimensionnement des entretoises

Les entretoises ont pour rôle de transférer la charge appliquée par le train via les rails et le ballast (s'il y a un ballast) aux poutres maîtresses.

La longueur des entretoises est fonction de l'espacement entre les poutres maîtresses. Celui-ci est déterminé bien évidemment par le schéma de dégagement qui constitue un minimum. La norme prescrit de plus un espacement minimum correspondant à un vingtième de la portée. L'espacement des entretoises sera gouverné par l'espacement des raidisseurs transversaux puisque les entretoises seront rattachées à ces derniers.

Les entretoises seront calculées comme des poutres sur appuis simples. Les charges de calcul comprennent le poids propre des entretoises, du ballast, du plancher, des rails et des dormants. À cela se rajoute la charge vive causée par le train. Pour un pont sans ballast, la norme ne permet aucune redistribution de la charge ni longitudinalement, ni transversalement.

Un pont sera considéré ballasté si les dormants sont de type standards et mesurent plus de 2,4 m (8 pieds) de long, plus de 200 mm (8 pouces) de large et sont espacés à moins de 0,6 m (24 pouces) centre à centre et si le ballast sous les dormants est d'au moins 150 mm (6 pouces). Pour un pont ballasté, une distribution longitudinale de la charge est permise pour le calcul du tablier. Par contre, pour le calcul des entretoises, la charge sera considérée comme deux charges concentrées ($P_{t,1}/2$) appliquées sur l'entretoise à la distance des rails (voir figure 3.1). Ces charges se calculent avec l'équation 3.1.

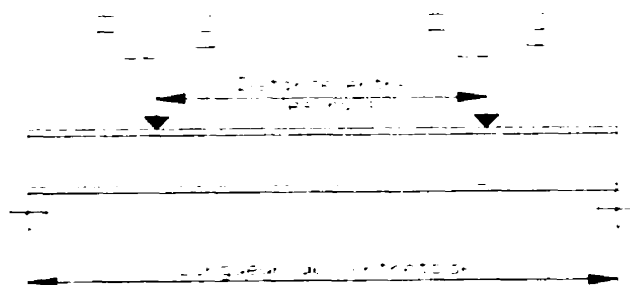


Figure 3.1 : Dimensionnement des entretoises

$$P_{LL} = \frac{1,15W_{LL}S_{ent}}{S_{LL}} \quad S_{ent} \leq S_{LL} \quad (3.1)$$

W_{LL} : charge d'essieu maximale (incluant impact et force centrifuge)

S_{ent} : espacement des entretoises

S_{LL} : espacement des essieux

Lorsque l'espacement des entretoises est plus grand que l'espacement des essieux ($S_{ent} > S_{LL}$), la répartition longitudinale des charges ponctuelles se fera comme si le tablier agissait comme une poutre sur appui simple.

On basera le dimensionnement des entretoises sur les contraintes admissibles en flexion et en cisaillement tout en respectant l'élancement maximal (longueur sur rayon de giration) de 157 pour les membrures fléchies.

Les entretoises aux extrémités du pont devront de plus être dimensionnées de façon à pouvoir s'en servir pour soulever le pont sans dépasser 50% des contraintes admissibles.

Pour le dimensionnement du pontage métallique qui recouvre les entretoises, on considérera les mêmes charges que pour ces dernières (à l'exception bien sûr du poids propre de celles-ci). La norme permet toutefois une répartition longitudinale et latérale de la charge vive. La répartition longitudinale se fera sur une longueur de 0,9 mètres (3 pieds) plus la distance minimale entre le dessous des dormants et le dessus des entretoises

mais sans dépasser 1,5 mètres (5 pieds) ni l'espacement minimal de la charge vive prescrite (1,5 mètres dans la charge Cooper).

L'épaisseur minimale du plancher est de 13 mm ($\frac{1}{2}$ pouce) pour un plancher en acier, 150 mm (6 pouces) pour un plancher en béton armé ou en béton précontraint et de 80 mm (3 pouces) pour un plancher de bois.

3.1.2 Effet des entretoises sur la stabilité

Les entretoises sont les principales composantes stabilisatrices de l'ouvrage. Par leur rigidité en flexion, elles empêchent la rotation de la poutre maîtresse. Elles agissent alors comme un ressort torsionnel. La rigidité de ce ressort est fonction de l'inertie des entretoises et de leur longueur. Cette longueur correspond, pour les fins de calcul, à l'espacement centre à centre des poutres maîtresses (voir figure 2.13).

3.2 Tablier

3.2.1 Critères de dimensionnement du tablier

On entend par tablier l'ensemble formé par les entretoises et le plancher. Ce dernier est généralement constitué d'une plaque d'acier ou d'une dalle de béton qui recouvre les entretoises et qui sert de support du ballast. Tout système de contreventement horizontal disposé sous les entretoises entre aussi dans cette catégorie.

Le dimensionnement des entretoises et du pontage métallique se fait tel que décrit à la section 1.1.1.

Le tablier devra, de plus, résister aux charges latérales du vent, de la force centrifuge et du mouvement latéral du train s'il fait partie du système de contreventement latéral.

3.2.2 Effet du tablier sur la stabilité

Le tablier du pont, constitué des entretoises et du plancher, possède, de par sa géométrie et ses dimensions, une rigidité très importante dans le plan horizontal où il agit comme un diaphragme. Cette rigidité étant de loin supérieure à la rigidité latérale des poutres maîtresses, le tablier empêchera, à toutes fins pratiques, le déplacement des poutres maîtresses au niveau des assemblages poutres maîtresses-entretoises. Ainsi, la poutre maîtresse sera libre de « tourner » dans le plan de sa section mais son centre de rotation sera imposé comme étant au niveau du tablier du pont.

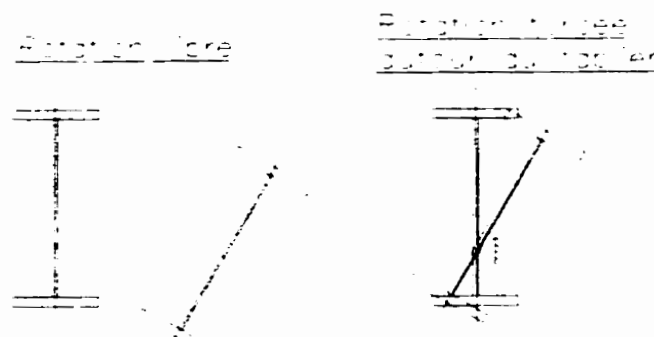


Figure 3.2: Effet du tablier sur la rotation des poutres maîtresses

Cette rotation selon un axe imposé augmentera la résistance au déversement des poutres maîtresses. En effet, l'énergie requise pour déformer la poutre hors-plan sera plus grande que si la poutre était libre.

3.3 Assemblages poutre-entretoise

3.3.1 Critères de dimensionnement des assemblages

Les assemblages entre les poutres maîtresses et les entretoises servent à transmettre les réactions des entretoises aux poutres maîtresses. Ils sont considérés comme des rotules puisqu'ils ne transmettent pas de moment comme nous l'avons vu à la section 3.1.1. Les assemblages ne transmettront donc qu'un effort tranchant des entretoises à la poutre maîtresse. La norme prescrit qu'ils devront posséder une résistance au moins égale à celle des membrures qui y sont rattachées.

3.3.2 Effet des assemblages sur la stabilité

L'assemblage entre les entretoises et les poutres maîtresses vient directement influencer la rigidité de la retenue torsionnelle qui est amenée par les entretoises (on exclut ici les assemblages utilisant un gousset d'assemblage). Ces deux systèmes étant en série, on devra additionner leur flexibilité selon la formule suivante:

$$\frac{1}{\beta_T} = \frac{1}{\beta_{ent}} + \frac{1}{\beta_{ass}} \quad (3.2)$$

L'évaluation de la rigidité de l'assemblage est généralement problématique. Elle dépend beaucoup de détails de conception et est difficile à évaluer simplement. Pour certains assemblages communs, on pourra se référer à l'ouvrage de Chen et Lui (1991). Les auteurs y proposent une série de formules relativement simples basées sur des résultats expérimentaux. L'utilisation d'une partie de ces formules est présentée au chapitre 4.

3.4 Goussets d'assemblage

3.4.1 Critères de dimensionnement des goussets

L'article 1.11.1 de la norme de l'AREA (cité au chapitre 1) prescrit l'utilisation de goussets d'assemblage à un espacement maximal de 3,65 mètres (12 pieds). Ces goussets doivent être attachés à la semelle supérieure des poutres maîtresses et à un raidisseur de ces dernières. À l'autre extrémité, les goussets seront attachés à la semelle supérieure des

entretoises. Les goussets devront avoir les dimensions les plus grandes que permet le schéma de dégagement. Ces goussets sont constitués d'une plaque dont les bords seront raidis si cette plaque dépasse l'élancement permis (voir figure 3.3). L'élancement maximal au-delà duquel un raidisseur est requis est de 60 (longueur/épaisseur). La longueur utilisée ici est la longueur totale du bord non-attaché du gousset.



Figure 3.3 : Dimensionnement des goussets d'assemblage

Ces goussets devront résister à une charge transversale qui correspond à 2,5% de la charge totale de compression que transmet la semelle supérieure de la poutre maîtresse. À cette charge sera additionnée toute charge transversale provenant des charge latérales (vent, force centrifuge, mouvement latéral du train).

Le dimensionnement se fera en considérant les limites d'élancement pour des pièces comprimées. Ces limites d'élancement sont les suivantes:

- semelles des poutres ou des cornières en T :
 - ⇒ poutres sur lesquelles reposent les dormants: $b_0/t \leq 10$
 - ⇒ poutres ne supportant pas de dormants et pièces comprimées: $b_0/t \leq 12$
 - ⇒ éléments secondaires (incluant systèmes de contreventement) : $b_0/t \leq 14$
- plaques : $b_0/t \leq 12$
- âme d'un T : $b_0/t \leq 16$

La norme précise que si une pièce dépasse ces limites d'élancement, on peut utiliser cette pièce mais on ne peut tenir compte dans les calculs de résistance des portions de la pièce qui dépassent ces critères.

Le gousset sera ainsi conçu comme un poteau rectangulaire de dimensions t_g par $12t_g$ si il n'est pas raidi. S'il est raidi, on considérera ce poteau comme un T dont la base mesurera $16t_g$.

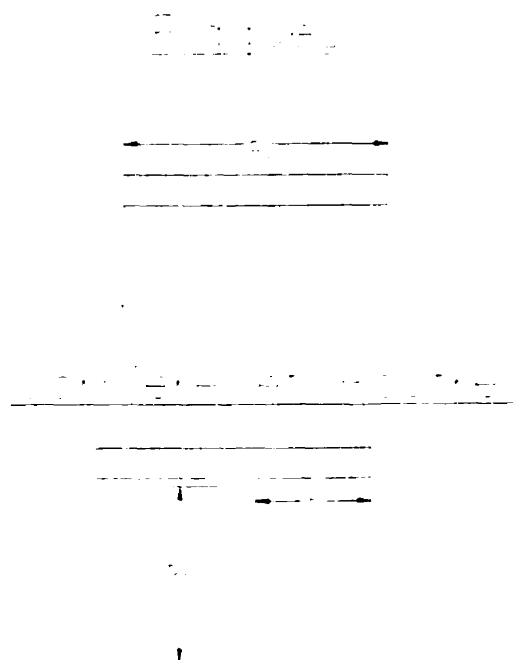


Figure 3.4 : Dimensions à utiliser dans les limites d'élancement

3.4.2 Effet des goussets sur la stabilité

Les goussets d'assemblage ont une influence considérable sur la stabilité de l'ouvrage. En effet, ils viennent assurer une connexion totale entre les entretoises et les poutres maîtresses. Se faisant, ils court-circuitent les assemblages ordinaires qui relient les entretoises aux poutres maîtresses. Leur très grande rigidité, due à leurs dimensions particulières, pourraient même contribuer à augmenter la rigidité des entretoises en raccourcissant la longueur nette des entretoises. On pourrait de fait considérer les extrémités des entretoises qui sont rattachées aux goussets comme parfaitement rigides par rapport au reste de la portée de l'entretoise.

Les goussets d'assemblage ont aussi un effet secondaire sur la rigidité latérale des poutres maîtresses. Ils viennent augmenter les dimensions des raidisseurs transversaux et donc viennent raidir de façon encore plus prononcée la poutre maîtresse, ce qui vient diminuer la distorsion possible de celle-ci.

3.5 Raidisseurs transversaux

3.5.1 Critères de dimensionnement des raidisseurs transversaux

Des raidisseurs transversaux sont requis dès que l'âme d'une poutre dépasse la limite d'élancement de $h/w=60$. Dans ce cas, les raidisseurs seront disposés de chaque côté de l'âme et espacés de :

$$d_r = \frac{34,4w}{\sqrt{S_{adm}}} \leq 1830 \text{ mm (6 pieds)} \quad (4.3)$$

où S_{adm} est la contrainte admissible de l'acier en cisaillement (en MPa) et w l'épaisseur de l'âme (en mm). L'élancement (profondeur/épaisseur) des raidisseurs sera inférieur à 16 et leur profondeur de chaque côté de l'âme sera de 51 mm (2 pouces) plus 1/30 de la profondeur de la poutre. Un raidisseur simple (un seul côté de l'âme) pourra être utilisé s'il possède la même inertie calculée par rapport à l'âme.

Les goussets d'assemblage étant rattachés à un raidisseur transversal, on définira les espacements des goussets et des raidisseurs en conséquence. Ces espacements influenceront également sur l'espacement des entretoises.

3.5.2 Effet des raidisseurs transversaux sur la stabilité

Le rôle premier des raidisseurs transversaux est d'empêcher le voilement de l'âme sous les contraintes de cisaillement. Les raidisseurs transversaux ne sont pas conçus pour aider la poutre au déversement.

Cependant, ils contribuent à réduire la distorsion de la section, ce qui revient à augmenter l'épaisseur de l'âme de la poutre maîtresse. Cette diminution de la distorsion se traduit par une augmentation de la résistance de la poutre au déversement.

3.6 Raidisseurs longitudinaux

3.6.1 Critères de dimensionnement des raidisseurs longitudinaux

La norme de l'AREA ne traite pas de l'utilisation des raidisseurs longitudinaux. Elle limite plutôt l'élancement de l'âme par différents critères. Ainsi, l'épaisseur d'une âme sera au moins égale à $1/6$ de l'épaisseur des semelles et $1/170$ de la profondeur de l'âme. La distance entre les supports latéraux divisée par le rayon de giration de la partie comprimée de la poutre, calculée par rapport à l'axe faible de la poutre, ne pourra être supérieure à 157. La norme de l'AREA ne permet pas l'utilisation d'une âme qui dépasse ces critères de dimensionnement.

3.6.2 Effet des raidisseurs longitudinaux sur la stabilité

Les raidisseurs longitudinaux servent à apporter un support latéral supplémentaire à l'âme de la poutre maîtresse. Ce support servira à empêcher le voilement local de l'âme, voilement qui peut diminuer la résistance de la poutre à la flexion. Un raidisseur longitudinal ne sera utilisé que pour des poutres à âme très élancée, les poutres de dimensions plus ordinaires n'en ayant pas besoin. Du point de vue de la stabilité globale, les raidisseurs longitudinaux viennent augmenter l'inertie de la poutre selon l'axe faible et aussi, mais de façon négligeable, selon l'axe fort.

3.7 Raidisseurs porteurs

3.7.1 Critères de dimensionnement des raidisseurs porteurs

La norme de l'AREA prescrit l'utilisation de raidisseurs porteurs aux points d'appui des poutres. Ces raidisseurs doivent répondre aux mêmes critères d'élancement des pièces comprimées cités à la section 3.4.1.

Les raidisseurs porteurs permettent le transfert de l'effort tranchant de l'âme de la poutre en réaction de la poutre sur son appui. Ils sont calculés comme des poteaux qui comprennent, outre les raidisseurs porteurs eux-mêmes, une portion de l'âme. Cette portion de l'âme est égale à 12 fois l'épaisseur de l'âme pour des raidisseurs porteurs d'extrémité et à 25 fois cette épaisseur pour des raidisseur porteurs intérieurs. Lors du

calcul de la résistance en compression, la longueur effective à utiliser est de 75% de la longueur réelle du raidisseur.

On doit aussi s'assurer que les raidisseurs porteurs peuvent résister aux charges sans se plastifier (longueur effective nulle) lorsque la contribution de l'âme est négligée.

3.7.2 Effet des raidisseurs porteurs sur la stabilité

Les raidisseurs porteurs apportent une rigidité latérale supplémentaire aux extrémités des poutres maîtresses. Cette rigidité supplémentaire est très importante puisqu'elle influence le mode de déversement. Si cette rigidité d'extrémité est grande, la poutre déversera comme si elle était appuyée latéralement à ses extrémités (extrémités fixes). Dans le cas contraire, les extrémités participeront aussi au déversement, résultant en une charge critique beaucoup plus faible (voir chapitre 2). Les calculs seront aussi plus complexes pour une faible rigidité puisque l'hypothèse des extrémités fixes ne sera plus valable. Or, l'utilisation de modèles basés sur l'hypothèse d'une retenue fixe aux extrémités de la poutre simplifie grandement le calcul de la charge de déversement comme nous l'avons vu au chapitre 2.

3.8 Effet de la charge

Sous l'action des charges de gravité, les poutres maîtresses d'un pont à tablier inférieur auront tendance à subir une rotation vers l'intérieur, tel que montré à la figure

3.5.

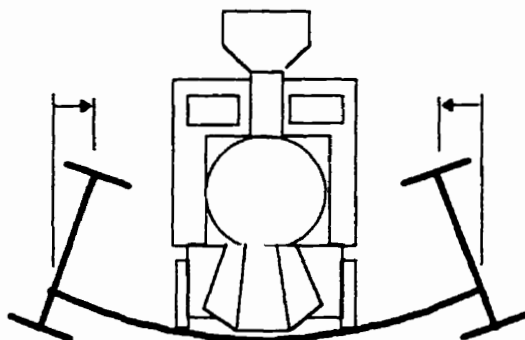


Figure 3.5 : Effet de la charge sur la configuration du pont

Cette rotation fera en sorte que le déversement, s'il avait lieu, se produirait selon cette configuration. Il est très improbable que le déversement s'effectuerait dans un mode où l'une des poutres, ou les deux, déverserait vers l'extérieur. Pour ce faire, il faudrait que la poutre contrebalance la charge causée par le train. De ce fait, nous pouvons supposer que le déversement se ferait selon un mode symétrique où les deux poutres déverseraient vers le centre du pont.

CHAPITRE 4

MODÉLISATION DU PONT TYPE

4.1 Introduction

Pour bien comprendre le rôle que joue chaque composante d'un pont dans la stabilité de ses poutres, un modèle numérique de pont a été créé. Ce modèle est réalisé avec la méthode des éléments finis. Il représente un pont typique de la façon la plus exacte possible pour ne pas avoir à faire d'hypothèses de départ sur le comportement en stabilité des poutres ou des différentes composantes du pont. Tous les éléments du pont type choisi sont donc modélisés de par leur géométrie réelle à l'exception de l'assemblage entre les entretoises et les poutres maîtresses qui sera remplacée par un ressort de rigidité appropriée.

Ce chapitre décrit les différentes étapes de la modélisation à l'exception des études de convergence que l'on retrouvera à l'annexe B. Une fois le pont modélisé dans son ensemble, des études paramétriques sur les composantes du pont permettront d'établir leur rôle dans la stabilité des poutres maîtresses. Ces études paramétriques et leurs résultats se retrouveront au chapitre 5.

4.2 Géométrie générale

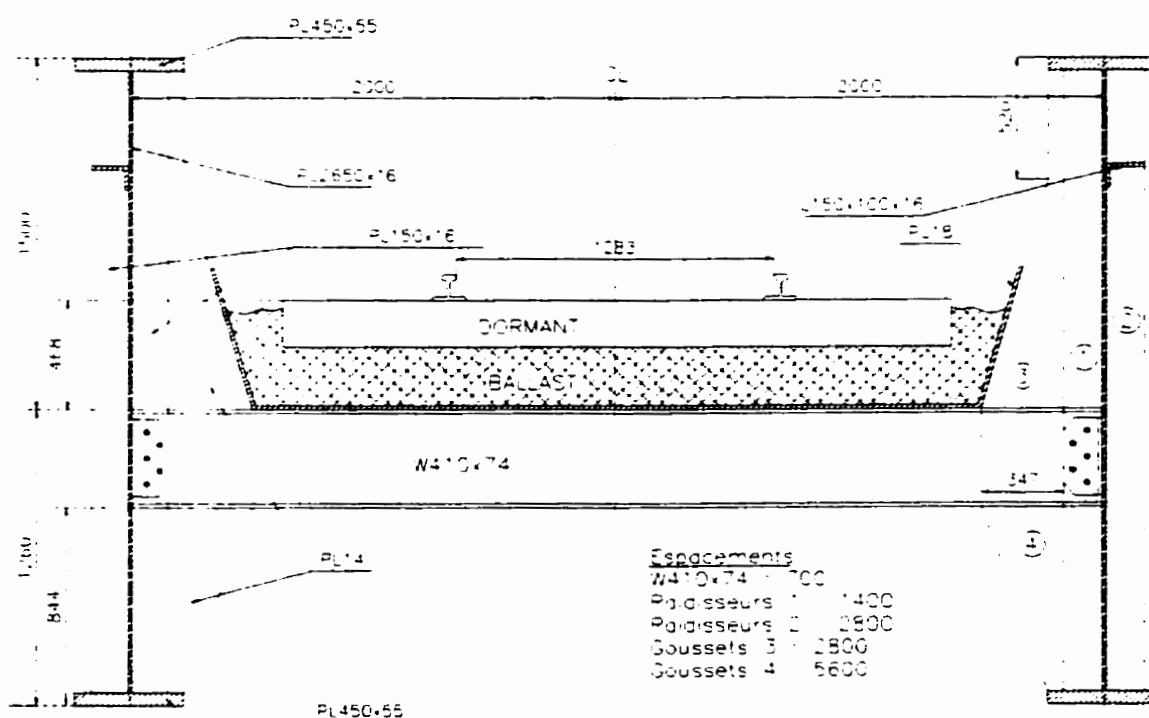
Le pont retenu est de conception typique pour les ouvrages ferroviaires au Canada. Il s'agit d'un pont qui se situe entre Thunder Bay et Schreiber sur un affluent du Lac Supérieur, la rivière Gravel. Ce pont, construit en 1990, remplace un pont construit en 1922. Il est constitué de deux portées simples de 26,9 mètres et il a un biais de 27 degrés à la pile centrale. Les culées sont par contre perpendiculaires à l'axe du pont. Le pont possède ainsi une poutre plus longue que l'autre dans chacune des deux portées. Les portées réelles des poutres sont de 25,9 mètres et 27,9 mètres.

Ce pont est conforme aux normes de l'AREA en vigueur en 1990 et est conçu pour résister à une charge Cooper E80 pour les poutres maîtresses et Cooper E100 pour les entretoises. L'acier utilisé est de type 350AT et le poids total de l'acier est de 163600 kg pour les deux portées. Les deux poutres étant quasi identiques, seule celle de 25,9 mètres a été étudiée afin d'éliminer la prise en compte de l'effet de biais pour ne pas alourdir l'étude numérique. Les chargements prescrits produisent les efforts suivants dans cette poutre.

Tableau 4.1 : Charges de calcul du pont type

	Cisaillement à l'appui (kN)	Moment fléchissant à mi-portée (kN*m)
Charge morte	477	2959
Charge vive	1142	6259
Impact	399	2186
Total	2018	11404

La flèche prévue sous la charge vive avec l'impact est de 24,4 mm ce qui correspond à 1/1036 de la portée. Les dimensions spécifiques se retrouvent sur les figures 4.1 et 4.2.

**Figure 4.1 : Dimensions du pont type (en mm)**

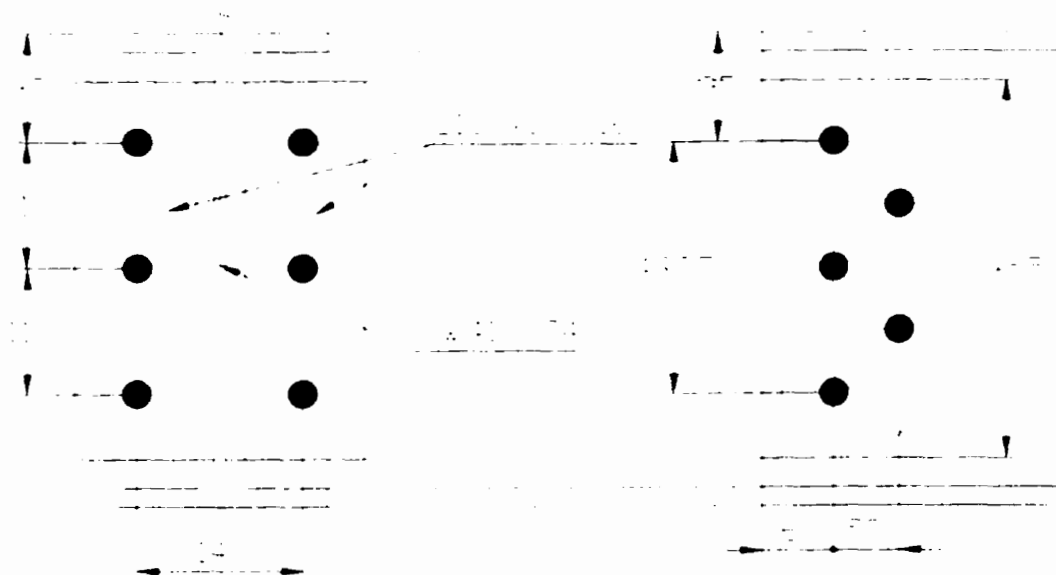


Figure 4.2 : Détails de l'assemblage poutre maîtresse - entretoise

4.3 Rigidité des assemblages poutre maîtresse-entretoise

Deux méthodes ont été utilisées pour évaluer la rigidité des assemblages poutre maîtresse-entretoise utilisés dans le pont-type. La première, analytique, est basée sur un article de Chen et Lui (1991). La deuxième est le calcul direct de la rigidité à partir d'un modèle utilisant les éléments finis.

4.3.1 Modèle de Chen et Lui

Les auteurs, dans leur article portant sur le comportement des assemblages semi-rigides, proposent une formule pour évaluer la rigidité initiale de divers types

d'assemblages. Pour un assemblage de l'âme à l'aide d'une cornière unique, la rigidité flexionnelle élastique (R_i) est la suivante:

$$R_i = G \frac{I_d^3}{3} \frac{\alpha \cosh(\alpha\beta)}{(\alpha\beta) \cosh(\alpha\beta) - \sinh(\alpha\beta)} \quad (4.1)$$

$$\beta = \frac{g_1}{d_s}$$

On retrouve les dimensions à utiliser sur la figure 4.3 alors que α vaut 4,2967 lorsque le coefficient de Poisson (ν) est de 0,3, ce qui est le cas de l'acier.

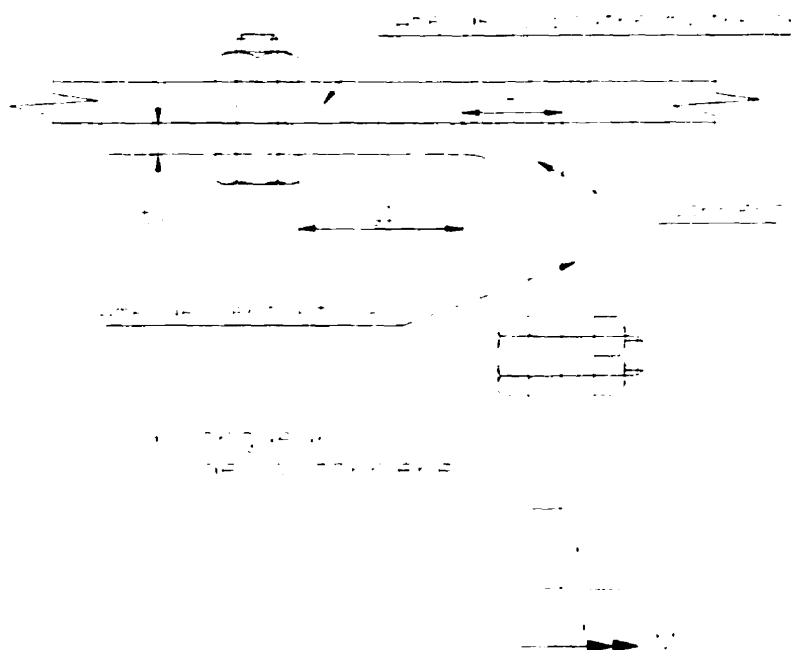


Figure 4.3 : Dimensions à utiliser dans la formule de Chen et Lui

Pour l'assemblage étudié, la rigidité est la suivante:

$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{g_1}{d_u} = \frac{37}{330} = 0,11212 \Rightarrow \alpha\beta = 0,48175 \\
 R_i &= G \frac{t_u^3}{3} \frac{\alpha \cosh(\alpha\beta)}{(\alpha\beta) \cosh(\alpha\beta) - \sinh(\alpha\beta)} \\
 &= 77000 \frac{16^3}{3} \frac{4,2967 \cosh(0,48175)}{0,48175 \cosh(0,48175) - \sinh(0,48175)} \\
 &= 13,24 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ce résultat est la rigidité d'un assemblage par une cornière simple. Pour un assemblage avec une cornière de chaque côté de l'âme, la rigidité est deux fois plus grande, soit:

$$R_i = 2 \times (13,24 \times 10^9) = 26,5 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm} \tag{4.3}$$

4.3.2 Vérification par éléments finis

Pour valider les résultats obtenus de la formule de Chen et Lui, un modèle par éléments finis de l'assemblage et d'une portion de l'entretoise a été développé. L'assemblage avec une cornière de chaque côté étant symétrique, les propriétés de symétrie permirent de ne modéliser que la moitié de l'assemblage. L'autre moitié est alors remplacée par des conditions frontières appropriées.

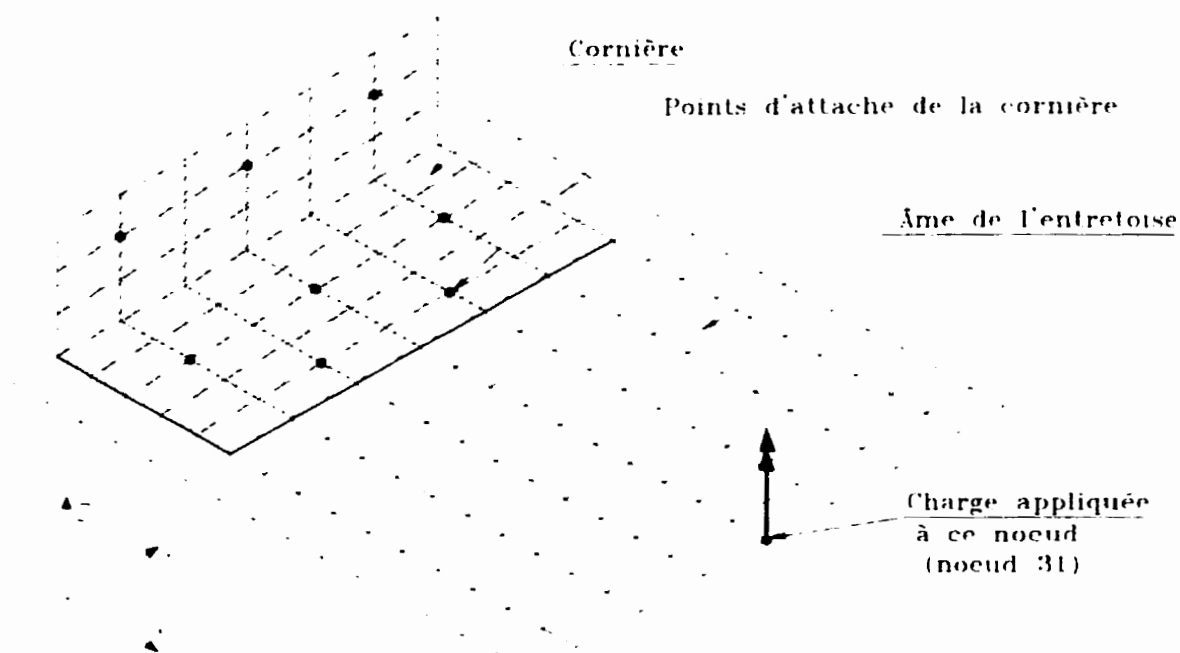


Figure 4.4 : Modèle de l'assemblage

Dans un premier temps, la portion de l'entretoise a été encastree pour connaître la rigidité de la poutre elle-même. L'assemblage fut ensuite introduit et une analyse effectuée. Finalement, pour tenir compte de l'effet de contact dans l'assemblage, les noeuds qui traversaient des éléments ont été bloqués par modification du fichier d'entrée et l'analyse refaite avec la nouvelle configuration jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de modifications à effectuer. La charge sur le modèle est un couple de $1 \text{ kN} \cdot \text{mm}$ dans le plan de l'âme de l'entretoise (autour de l'axe Z) appliqué au centre de l'extrémité libre de la poutre. Le résultat observé est la rotation de ce même noeud dans le même plan que la charge appliquée. Les résultats obtenus sont regroupés au tableau 4.2.

Tableau 4.2 : Résultats du modèle de l'assemblage

Modèle	Rotation en Z au noeud 31 ($\times 10^{-9}$)
Entretoise encastree	7,57
Entretoise et assemblage	625
Entretoise et assemblage avec effet de contact	42,2

Nous pouvons ainsi calculer la rigidité de l'assemblage comme suit:

$$R_i = \frac{M_{\text{applique}}}{\theta_{\text{assemblage}}} = \frac{M_{\text{applique}}}{\theta_{\text{entretoise-assemblage}} - \theta_{\text{entretoise}}} \quad (4.4)$$

$$R_i = \frac{1000 N \cdot mm}{(42,2 - 7,57) \times 10^{-9}} = 28,9 \times 10^9 N \cdot mm$$

Cette valeur correspond très bien aux résultats obtenus des formules de Chen et Lui. Nous prendrons la rigidité obtenue des éléments finis pour le reste des calculs.

4.4 Modélisation du pont type par éléments finis

4.4.1 Choix du logiciel

Pour effectuer l'analyse de stabilité de notre pont, nous devons utiliser un logiciel qui, au strict minimum, permettrait de prendre en compte l'effet des non-linéarités géométriques. Nous avons choisi le logiciel ADINA (ADINA R&D, 1990) pour notre étude. ADINA permet le calcul direct de la charge critique de flambement sans restriction sur les types d'éléments utilisés. Ce calcul est en fait la détermination des valeurs propres du système lorsque la matrice géométrique du modèle est considérée.

Les modes de flambement associés à ces charges critiques sont également trouvés. Plusieurs types d'éléments sont disponibles dont, entre autres, des éléments de poutres hermitiens ou isoparamétrique à deux ou plusieurs noeuds, des éléments de briques isoparamétriques à 0, 1 ou 2 noeuds intermédiaires par arête, des éléments de plaque triangulaires, des éléments de voiles minces à 4, 8 ou 16 noeuds et des éléments de ressorts linéaires.

4.4.2 Éléments utilisés

Notre structure était constituée principalement d'éléments de faible épaisseur (âme et semelles des poutres, goussets) dont le rapport largeur/épaisseur dépassait largement 10. Il était donc logique d'utiliser des éléments de voiles minces. La structure a ainsi été modélisée presque entièrement à partir d'éléments de voiles minces. Seules quelques pièces secondaires ont été modélisées à l'aide d'éléments de poutres et les assemblages poutres maîtresses-entretoises ont été réalisés à partir d'éléments de ressorts linéaires.

Préalablement à cette modélisation, des études de convergence ont été réalisées pour déterminer l'ordre des éléments à utiliser de même que le maillage nécessaire à un comportement adéquat du modèle. On retrouvera ces études de convergence à l'annexe B.

4.4.3 Géométrie

Des éléments de voiles minces à 16 noeuds ont été retenus pour les poutres maîtresses. On utilise 4 éléments sur la profondeur de l'âme 2 éléments sur la largeur de chaque semelle. Sur la longueur de la poutre, 36 éléments sont nécessaires. Les composantes secondaires (raidisseurs, goussets) sont modélisés avec des éléments à 4 noeuds, ce qui permet de réduire le nombre de degrés de liberté tout en conservant une réponse adéquate du modèle. Les entretoises sont, quant à elles, constituées d'une rangée de 5 éléments de voiles minces à 4 noeuds pour l'âme auxquels sont rattachés des éléments de poutres modélisant les semelles.

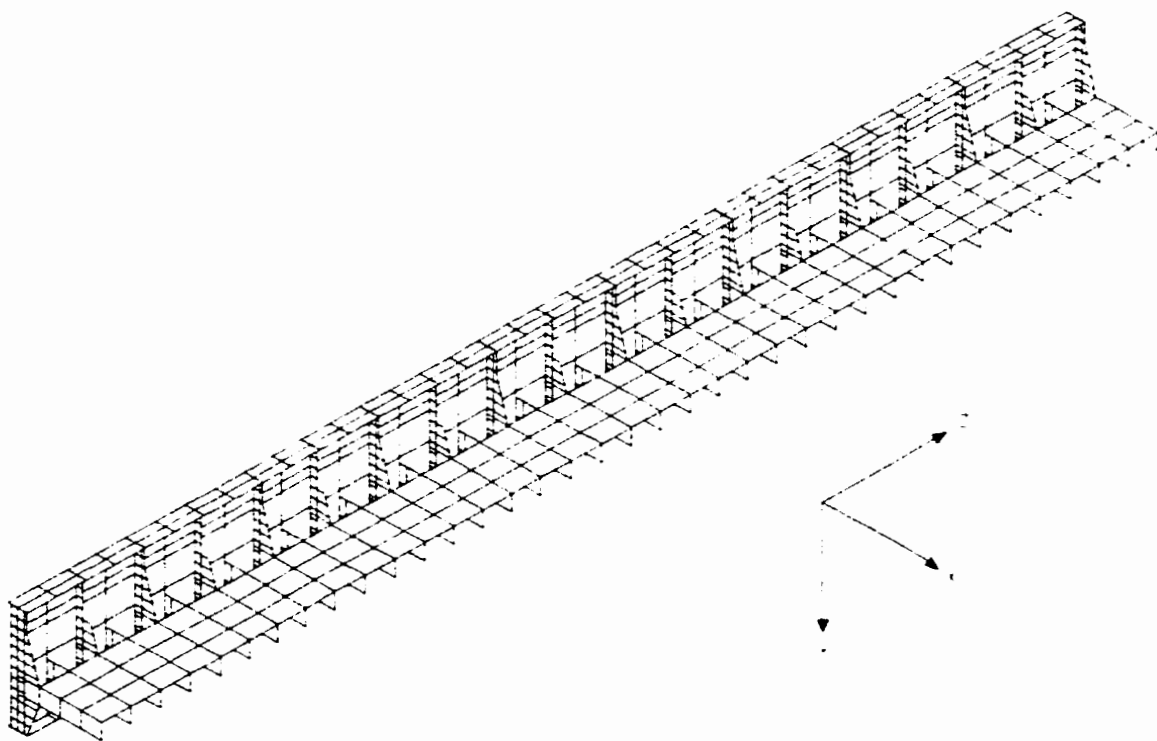


Figure 4.5 : Modèle du pont avec conditions de symétrie

La modélisation de l'assemblage poutre maîtresse-entretoise utilise un élément de ressort qui relie des déplacements de translation pour former l'équivalent d'un ressort torsionnel (figure 4.6). La rigidité de ce ressort est égale à la rigidité en torsion de l'assemblage divisée par le carré de la distance entre la rotule et le noeud A.

$$k_t = \frac{R_t}{d_t^2} = \frac{28,9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm}}{(220 \text{ mm})^2} = 597 \frac{\text{kN}}{\text{mm}} \quad (4.5)$$

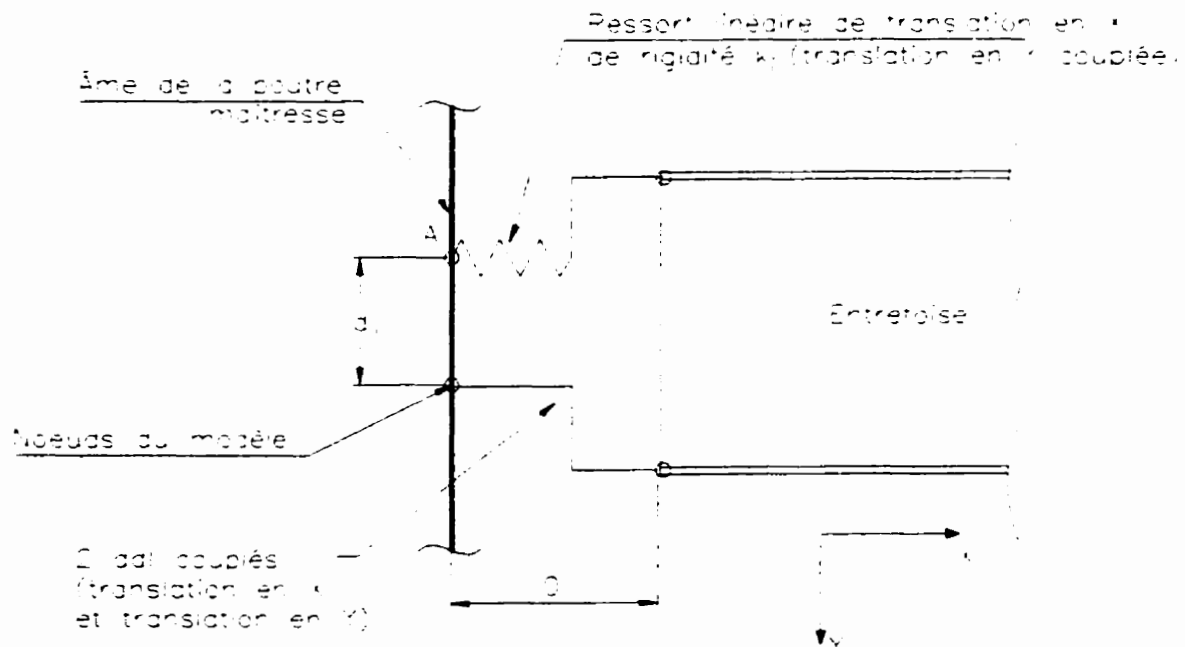


Figure 4.6 : Modèle de l'assemblage poutre maîtresse-entretoise

4.4.4 Conditions frontières

Dans un modèle d'éléments finis, la définition des conditions frontières est primordiale. Le pont typique réel n'est pas tout à fait symétrique, chaque portée possédant deux poutres de longueur différente à cause du biais. De plus, les conditions

d'appui ne sont pas symétriques puisqu'un joint d'expansion est prévu à une des extrémités de chaque poutre. Sur le pont type, cette extrémité correspond aux culées et l'on retrouve un appui fixe au niveau de la pile.

Afin d'obtenir des résultats qui soient plus faciles à interpréter, le pont modélisé a été rendu symétrique. Le biais a été enlevé pour avoir deux poutres identiques et la retenue longitudinale a été replacée au centre de la portée, les extrémités étant libres de se déplacer longitudinalement, et ce, afin de pouvoir observer des déplacements symétriques lors du gauchissement.

4.4.4.1 Conditions aux appuis

Pour modéliser les appuis, les degrés de liberté de déplacement vertical et les degrés de liberté de déplacement horizontal transversal ont été bloqués au niveau de la semelle inférieure aux extrémités de la poutre y sont également bloqués. Comme mentionné précédemment, la retenue longitudinale se fait à mi-portée et les deux appuis sont libres de se déplacer longitudinalement. Les degrés de liberté en rotation ont été laissés libres aux appuis.

4.4.4.2 Conditions frontières supplémentaires dues à la symétrie

Pour diminuer la taille du modèle, seule une moitié du pont a été utilisée (figures 4.5 et 4.7). Nous avons établi (voir section 3.8) que le mode de déversement des poutres serait symétrique par rapport à l'axe du pont et que les poutres déverseraient vers

l'intérieur. Les conditions frontières qui reflètent cet état et qui viennent remplacer la moitié du pont au niveau du tablier, le long du centre du pont, sont:

- déplacement horizontal (X) nul
- déplacement vertical (Y) et longitudinal (Z) permis
- rotation nulle autour des axes vertical (Y) et longitudinal (Z)

Ces conditions frontières supplémentaires sont appliquées à l'axe de symétrie et donc aux extrémités des entretoises (noeuds 1 et 2 sur la figure 4.7).

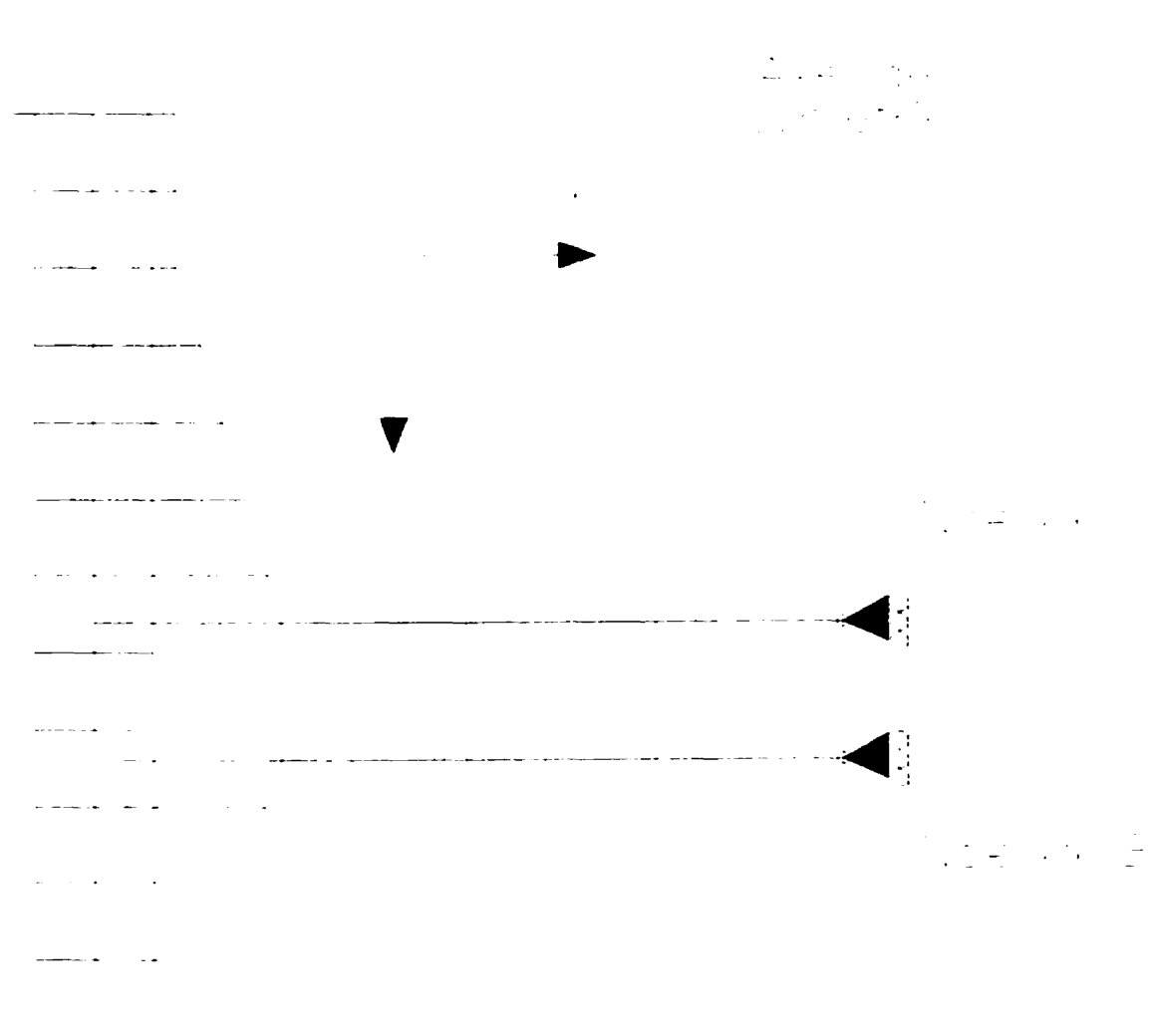


Figure 4.7 : Section du pont avec conditions de symétrie

En appliquant ces conditions frontières particulières, la moitié de chaque entretoise de même que la deuxième poutre maîtresse ont pu être enlevées ce qui réduit significativement la taille du modèle et par conséquent le temps de calcul.

4.4.5 Chargement appliqué au modèle

Le chargement qui est appliqué sur le modèle est une charge uniforme sur le tablier. Cette charge uniforme est appliquée sur les éléments de voile mince qui forment le tablier sous la forme d'une pression. Le moment maximal auquel est soumis la poutre doit être calculé manuellement par la formule suivante:

$$M_{\max} = \frac{\omega L_T^2}{8} \quad (4.6)$$

où ω est la charge répartie par unité de longueur. Cette charge correspond à la pression appliquée au tablier multiplié par la largeur du tablier qui est ici de 1485 mm.

Les résultats que nous donne ADINA sont sous la forme de coefficients λ_n qui sont en fait des facteurs multiplicateurs de la charge appliquée et qui correspondent aux différents modes de flambement. Nous sommes uniquement intéressés au premier mode de flambement car il est, par définition, celui qui possède la charge de flambement la plus faible. Pour obtenir le moment critique M_{cr} , il nous suffit alors de multiplier la valeur de M_{\max} par λ_1 . Cette valeur de λ_1 doit être comprise entre 1 et 500 pour des raisons de fonctionnement interne du logiciel ADINA. La valeur de la charge appliquée doit donc être choisie en conséquence en fonction du M_{cr} attendu.

Certaines précisions sont à apporter ici au niveau de l'utilisation d'ADINA. Ces précisions s'appliqueront pour l'utilisation de tout logiciel général d'éléments finis. La recherche du premier mode de flambement dans de tels logiciels est basée sur une

méthode itérative qui se sert de la matrice de rigidité de la structure en position déformée. Cette méthode (différentes méthodes existent mais celle-ci est plus directe) nous donne le premier mode de flambement de la structure, quel qu'il soit. La méthode ne fait pas (et ne pourrait pas faire) la distinction entre les types de flambement. Ainsi, si une structure est conçue de telle manière qu'un voilement local puisse se produire à un niveau de charge inférieur à celui du flambement global, c'est le mode de voilement local (et donc le premier mode de flambement) que retourne le logiciel. On peut bien sûr demander au logiciel les modes supérieurs mais cela demande un effort de calcul supplémentaire considérable et rien ne nous permet d'espérer que les modes suivants ne sont pas non plus des voilements locaux. De plus, il est très difficile de distinguer clairement un mode global « pur ». Souvent, on pourra avoir un mélange de voilement local et de flambement global.

Cette particularité a posé de sérieux problèmes pour la poutre du pont type. Celle-ci a en effet une âme très élancée qui est sujette au voilement local entre les raidisseurs. Lorsque le degré de retenue des poutres maîtresses est augmenté, la possibilité d'un voilement local survenant avant les modes de flambement globaux recherchés augmente. Il devient alors plus difficile d'évaluer l'effet de la retenue sur le déversement des poutres maîtresses.

CHAPITRE 5

ÉTUDE PARAMÉTRIQUE

5.1 Approche utilisée

Le but de l'étude du pont typique est de déterminer l'effet de chaque composante sur le comportement en stabilité de l'ouvrage. Pour ce faire, une approche couramment utilisée est de faire varier les propriétés de chaque composante à partir de la configuration originale pour voir l'effet de cette composante. Or, le pont réel est très rigide, voire surdimensionné, en ce qui a trait à la stabilité. L'approche courante à partir de la configuration originale ne nous aurait pas permis de déceler l'influence de toutes les composantes, la variation de la rigidité d'une composante pouvant être trop faible par rapport à celle de l'ouvrage complet. Il a donc été nécessaire de prendre une approche légèrement différente pour notre étude paramétrique.

Nous avons donc enlevé au départ toutes les pièces qui contribuent à stabiliser la poutre (goussets, raidisseurs, etc.). La poutre est alors très flexible latéralement puisque seules subsistent comme support latéral les entretoises qui ne sont plus reliées à cette dernière que par l'assemblage poutre maîtresse-entretoise. L'ajout des autres composantes individuellement aura ainsi une influence plus nette et plus significative (on retrouvera à l'annexe F un tableau récapitulatif de certains des moments de déversement obtenus.)

5.2 Poutre classique

Nous allons d'abord, avant d'étudier les différentes composantes, récapituler certains résultats obtenus des études de convergence.

Dans ces études, la poutre est seule et toutes les pièces stabilisatrices sont enlevées, y compris les entretoises. La poutre est alors soumise à un moment constant. De plus, les conditions d'appui sont celles de la théorie classique du déversement de Timoshenko, à savoir une retenue en appui simple en flexion latérale et en torsion aux extrémités de la poutre. Ces conditions d'appui équivalent à maintenir latéralement l'âme de la poutre mais à laisser libre les semelles de manière à laisser le gauchissement libre de se produire aux extrémités. Pour la flexion selon l'axe fort, la poutre est également en appui simple à ses extrémités.

Les moments de déversement obtenus du modèle sont récapitulés au tableau 5.1. Le moment de déversement théorique auquel on y fait référence est celui calculé de la théorie classique de déversement de Timoshenko (équation 2.9) et est de 4744 kN*m. Même pour cette poutre sans retenue latérale particulière, l'influence de la distorsion se fait sentir et se traduit par une diminution de 5% du moment de déversement.

Tableau 5.1 : Moment critique, poutre classique

	M_{cr} (kN*m)	M_{cr} (%théorie)
Distorsion permise	4342	91,5
Distorsion empêchée	4583	96,6

5.3 Effet du tablier

La première composante du pont type étudiée est le tablier. Par tablier, on entend l'ensemble formé par les entretoises et par le pontage qui les recouvrent. Celui-ci agit comme un diaphragme horizontal qui limite les déplacements latéraux à son niveau.

Pour isoler l'effet de diaphragme horizontal du tablier de l'effet de retenue en torsion des entretoises, une rigidité nulle est imposée aux assemblages poutre maîtresse-entretoise. Les entretoises sont donc rotulées à leurs extrémités.

5.3.1 Conditions d'appui classiques

Les figures 5.1 à 5.3 nous montrent le déversement de la poutre de notre pont-type lors de l'ajout du tablier. Les conditions frontières aux extrémités sont encore celles de la théorie classique, à savoir une retenue latérale aux extrémités de la poutre, retenues qui laissent le gauchissement libre.

Sur ces figures, on peut y voir, bien que le tablier possède une rigidité latérale finie, que celle-ci est tellement grande que l'on peut la considérer, à toutes fins pratiques, comme infinie. Il en résulte que la poutre maîtresse ne subit pas de déplacement latéral

vis-à-vis le tablier. Elle est en fait forcée de tourner autour de ce dernier. Cet effet de rotation est encore plus facilement visible à la figure 5.4 qui représente le mode de déversement lorsque la distorsion est empêchée.

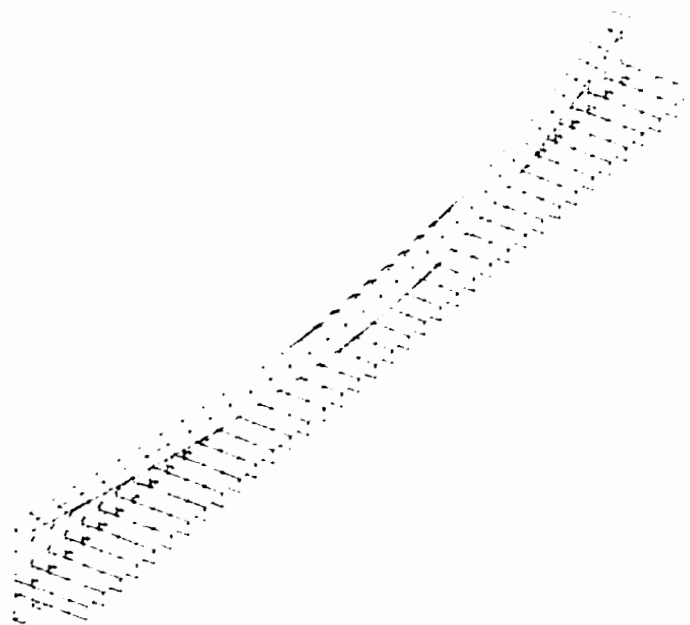


Figure 5.1 : Poutre avec effet de tablier et retenues latérales aux extrémités, vue isométrique



Figure 5.2 : Poutre avec effet de tablier et retenues latérales aux extrémités, vue en plan

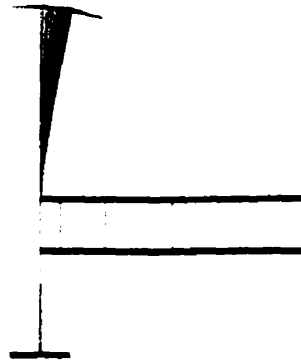


Figure 5.3 : Poutre avec effet de tablier et retenues latérales aux extrémités, section

Quantitativement, le mode de déversement obtenu correspond à un moment de 6720 kN*m. En comparaison, rappelons que le moment de déversement obtenu de la théorie classique pour la même poutre est de 4342 kN*m, ce qui représente une différence de 55%. Les conditions frontières sont pourtant les mêmes que celles de la théorie classique. L'augmentation du moment de déversement n'est due qu'à la présence du tablier qui impose la position verticale de l'axe de rotation de la poutre.

Cette augmentation est encore plus grande si l'on empêche la distorsion de se produire. On peut voir à la figure 5.4 la section du mode de déversement lorsque la distorsion est empêchée. La position du point de retenue latérale du tablier est ici représentée par le symbole \square . Ce mode correspond à un moment critique de 8500 kN*m soit près de deux fois le moment critique prédit par la théorie classique.

La retenue latérale peut donc augmenter fortement le moment de déversement. Cette augmentation sera par contre diminuée par l'effet de la distorsion.



**Figure 5.4 : Poutre avec effet de tablier et retenues latérales aux extrémités,
distorsion empêchée**

5.3.2 Conditions d'appui et chargement réels

Dans les modes de déversement que nous venons de présenter, les conditions d'appui sont celles utilisées par la théorie classique. Les conditions d'appui réelles du pont sont différentes. Ce dernier ne possède pas, à ses extrémités, de retenue latérale extérieure ou supplémentaire que l'on pourrait, sans hésiter, considérer comme parfaitement rigides. La poutre est en fait simplement appuyée à ses extrémités au niveau de la semelle inférieure.

Pour les conditions d'appui réelles du pont, le mode de déversement est très différent de celui des figures 5.1 à 5.3. Il est présenté aux figures 5.5 à 5.7. Si l'on regarde la forme de la semelle supérieure, on voit que le mode de déversement obtenu ressemble fortement à celui d'un poteau infiniment rigide dont les extrémités sont retenues élastiquement (figure 5.6). Ce mode de flambement est prédit par les méthodes

de poteau retenu élastiquement dont les extrémités ne sont pas fixes (Lazard, 1946; Timoshenko, 1947).

On peut également remarquer que la distorsion affecte très fortement l'âme de la poutre, plus particulièrement la partie située au-dessus de l'assemblage (figure 5.7).

Le moment de déversement associé à ce mode est bien sûr beaucoup plus faible que celui obtenu avec des retenues latérales aux extrémités de la poutre. Il passe de 6720 kN*m pour la poutre avec retenues latérales à ses extrémités à 4710 kN*m pour les appuis réels.

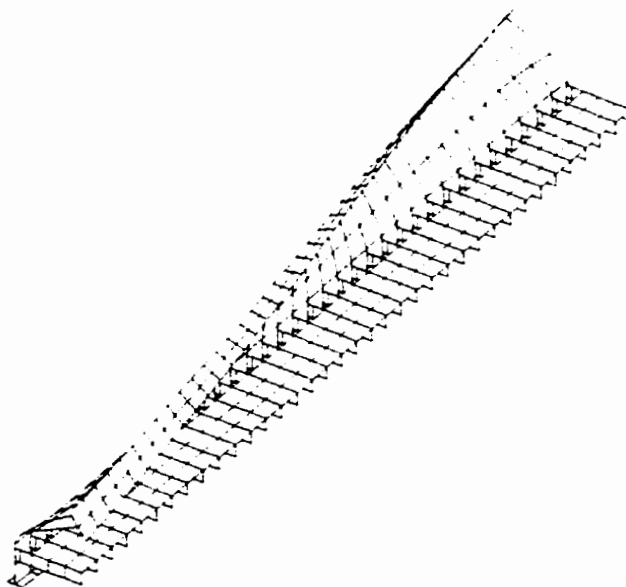


Figure 5.5 : Poutre sans raidisseurs sous moment uniforme, vue isométrique

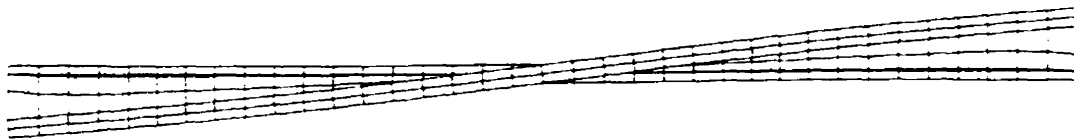


Figure 5.6 : Poutre sans raidisseurs sous moment uniforme, vue en plan

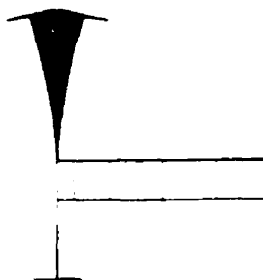


Figure 5.7 : Poutre sans raidisseurs sous moment uniforme, section

Le pont réel s'éloigne de la théorie classique du déversement non seulement par ses appuis mais aussi par son chargement. Ce dernier est en effet beaucoup plus près de la charge uniforme que du moment constant. Nous avons donc appliqué une charge uniforme sur le tablier du pont. Ce changement du type de chargement influence le moment de déversement de même que le mode. Les figures 5.8 à 5.10 nous montrent le mode de déversement de la poutre avec les appuis réels soumis à une charge constante sur le tablier. Le moment de déversement pour cette poutre est de 5120 kN*m.

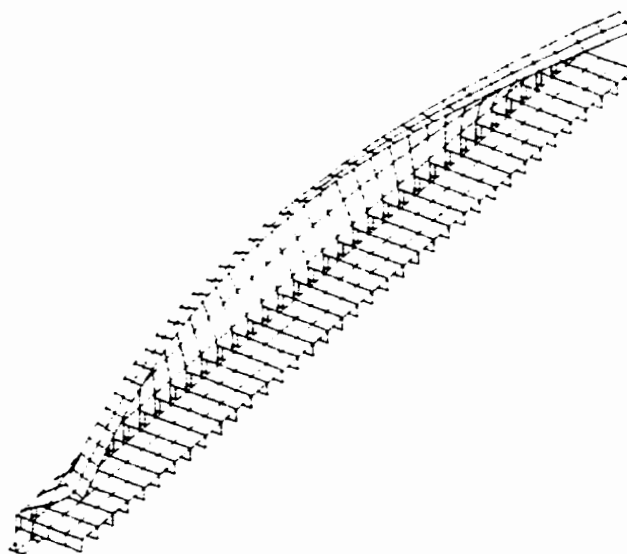


Figure 5.8 : Poutre avec effet de tablier sous charge constante, vue isométrique

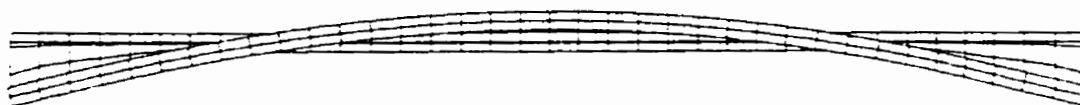


Figure 5.9 : Poutre avec effet de tablier sous charge constante, vue en plan



Figure 5.10 : Poutre avec effet de tablier sous charge constante, section

Comme pour la poutre retenue à ses extrémités (figures 5.1 à 5.3), la semelle supérieure suit la forme d'un sinus mais celui-ci est décalé vers l'intérieur du pont. On remarquera aussi le rôle prépondérant de la distorsion qui, comme pour la poutre soumise à un moment constant, affecte fortement la partie de l'âme située au-dessus de l'assemblage (figure 5.10).

5.4 Effet des entretoises et de l'assemblage poutre maîtresse-entretoise

Les entretoises jouent un rôle double. Elles empêchent, avec l'aide du pontage métallique, le déplacement latéral de la poutre au niveau du tablier. Outre cet effet de diaphragme, elles viennent également diminuer la rotation des poutres maîtresses en offrant une retenue en torsion. Cette retenue est transmise à la poutre maîtresse via l'assemblage poutre maîtresse-entretoise. Le tout se comporte en série, la rigidité totale sur la poutre maîtresse ne pouvant être plus grande que la plus grande des rigidités de l'entretoise ou de l'assemblage, ainsi que le démontre l'équation 5.1.

$$\frac{1}{\beta_T} = \frac{1}{\beta_{ent}} + \frac{1}{\beta_{ass}} + \frac{1}{\beta_{sec}} \quad (5.1)$$

Pour bien saisir cet effet de retenue en torsion, la rigidité des assemblages a été modifiée pour prendre plusieurs valeurs différentes. Les rigidités utilisées ont varié d'une

rigidité correspondant au quart de la rigidité initiale à une rigidité infinie. Cette rigidité initiale (β_i) est de $28,9 \times 10^9$ N*mm (voir section 4.3). La rigidité des entretoises (β_{ent}), telle que calculée selon la figure 2.13, est de $27,9 \times 10^9$ N*mm. La rigidité infinie correspond au cas où les degrés de liberté des extrémités des entretoises sont directement reliés à ceux de l'âme de la poutre maîtresse. La rigidité affectant la poutre maîtresse est alors la pleine rigidité des entretoises.

L'effet des entretoises et de leur assemblage à la poutre maîtresse est également influencé par les raidisseurs transversaux présents sur la poutre maîtresse, comme le prédit l'équation 5.1. L'effet des entretoises et de leur assemblage doit donc être examiné en les combinant à l'effet des raidisseurs transversaux. Pour ce faire, les raidisseurs transversaux seront introduits sur la poutre maîtresse de façon progressive. Les raidisseurs transversaux simples seront introduits les premiers selon l'espacement montré à la figure 4.1 soit aux 1400 mm. Ensuite viendront les raidisseurs doubles qui seront ajoutés aux raidisseurs simples à tous les 2800 mm, les raidisseurs simples étant laissés en place. Finalement les goussets d'assemblage supérieurs et inférieurs seront ajoutés aux raidisseurs simples et doubles à leur espacement spécifié à la figure 4.1.

Pour chaque configuration de raidisseurs, le moment de déversement est calculé pour les trois rigidités d'entretoise/assemblage spécifiées plus haut (rigidité initiale, quart de la rigidité initiale et rigidité infinie). Le processus complet est ensuite recommencé mais cette fois en ajoutant le raidisseur longitudinal sur la poutre maîtresse. L'effet de ces raidisseurs transversaux et longitudinal et des goussets d'assemblage sera discuté plus

loin aux sections 5.5, 5.6 et 5.7 . Dans tous les cas, la charge appliquée est un moment constant le long de la poutre.

Les moments de déversement obtenus de tous ces cas sont regroupés au tableau 5.2 et sur la figure 5.11 et comparés au tableau 5.3. Dans ce dernier, on détermine une épaisseur équivalente qui correspond à l'épaisseur que devrait avoir l'âme de la poutre maîtresse pour que l'inertie totale de l'âme de la poutre, calculée autour de l'axe longitudinal, soit la même qu'avec l'ajout des raidisseurs transversaux (équation 5.2). Cette épaisseur donne une indication de l'importance du rôle des raidisseurs sur la distorsion sur la poutre. Plus l'âme de la poutre sera épaisse, plus faible sera la distorsion.

$$\frac{L_T w_{\text{equiv}}^3}{12} = \frac{L_T w^3}{12} + I_{\text{raidisseurs}} \quad (5.2)$$

L_T : longueur totale de la poutre;

w : épaisseur de l'âme;

w_{equiv} : épaisseur équivalente de l'âme;

$I_{\text{raidisseurs}}$: inertie totale de tous les raidisseurs.

Pour les poutres avec goussets, l'épaisseur équivalente est variable puisqu'elle est fonction de la largeur des raidisseurs et que celle-ci varie sur la profondeur de la poutre. L'épaisseur équivalente la plus petite correspond donc à l'épaisseur équivalente au sommet du gousset et la plus grande correspond à celle à la jonction gousset-entretoise.

L'augmentation du moment critique auquel on fait référence dans la tableau 5.3 est calculée selon l'équation 5.3.

$$\text{Augmentation de } M_{cr} = \frac{M_{\text{infini}} - M_{1/4}}{M_{1/4}} \quad (5.3)$$

M_{infini} : moment critique pour un assemblage de rigidité infinie;

$M_{1/4}$: moment critique pour un assemblage dont la rigidité est le quart de la rigidité initiale.

Tableau 5.2 : Moment de déversement pour diverses rigidités des assemblages

		$M_{1/4}$	M_{initial}	M_{infini}
Sans raidisseur longitudinal	Sans raid. Transversal	8150	8150	8150
	Raid. Transversal simple	26340	26720	26890
	Raid. Transversal double	26840	27180	27350
	Raid. transversal + gousset d'assemblage	32400	32740	32970
Avec raidisseur longitudinal	Sans raid. Transversal	8200	8200	8200
	Raid. Transversal simple	30380	34960	36200
	Raid. Transversal double	35840	43020	45850
	Raid. transversal + gousset d'assemblage	46170	46890	47400

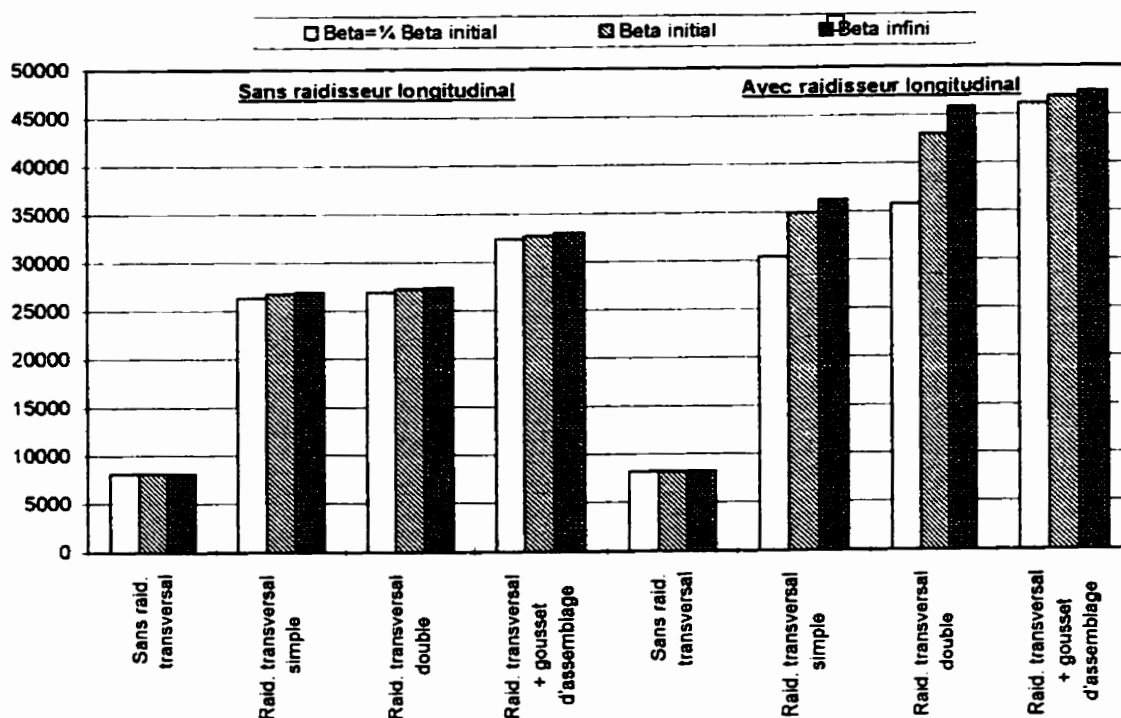


Figure 5.11 : Moment de déversement pour diverses rigidités des assemblages

Tableau 5.3 : Variation du moment de déversement pour une augmentation de la rigidité des assemblages

		Épaisseur équivalente (mm)	Augmentation de M_{cr} (%)
Sans raidisseur longitudinal	Sans raid. Transversal	16	0
	Raid. transversal simple	36	2
	Raid. transversal double	73	2
	Raid. transversal + gousset d'assemblage	variable de 77 à 142	2
Avec raidisseur longitudinal	Sans raid. Transversal	16	0
	Raid. transversal simple	36	19
	Raid. transversal double	73	28
	Raid. transversal + gousset d'assemblage	variable de 77 à 142	2

On peut voir au tableau 5.3 que l'absence de raidisseurs transversaux annule l'influence de la rigidité de l'assemblage. Ceci s'explique par le fait que la rigidité latérale de l'âme est si faible que l'addition de rigidité au niveau de l'assemblage n'influence pas le comportement des semelles, l'âme se déformant entièrement en distorsion.

L'équation 5.1 nous prédit que la rigidité totale sera toujours plus faible que la plus faible des rigidités. L'augmentation de la rigidité qui est déjà la plus forte aura une influence très faible, d'autant plus faible que la différence entre les rigidités est grande.

On peut voir également au tableau 5.3 que l'influence de la rigidité de l'assemblage est presque nulle lorsqu'il n'y a pas de raidisseur longitudinal indépendamment de la présence ou non des raidisseurs transversaux. Cet aspect sera discuté à la section suivante.

En fait, la rigidité de l'entretoise et de l'assemblage n'aura de l'influence que lorsque seront présents les raidisseurs transversaux et le raidisseur longitudinal.

Au tableau 5.3, on voit également que la rigidité de l'assemblage perd son influence lors de la présence de goussets d'assemblage. Ce résultat était prévu puisque les goussets court-circuitent l'assemblage en venant fixer directement les entretoises au raidisseur transversal sans passer par l'assemblage poutre maîtresse-entretoise.

5.5 Effet des raidisseurs longitudinaux et voilement local

L'ajout de raidisseur longitudinal et transversaux contribue à augmenter le moment de déversement de la poutre. Au-delà d'un certain nombre ou d'une certaine rigidité des raidisseurs, l'instabilité se produit sous la forme de voilement local de l'âme et le modèle n'est plus utile pour étudier le déversement de la poutre.

Il est possible d'évaluer ce voilement local avec les équations B.4 et B.5 de l'annexe B. Le moment qui causera ce voilement local représente alors la limite d'utilisation de notre modèle pour l'étude du déversement. Pour la poutre sans raidisseur longitudinal, en considérant un panneau de dimensions 1500 par 1400 et une distribution trapézoïdale des contraintes de proportion 2/3, on obtient un facteur k_f de 11,0 (Bleich, 1952) ce qui se traduit par un moment critique de 18400 kN*m. Pour la poutre avec raidisseur longitudinal, le panneau sera de dimensions 1100 par 1400. Le facteur k_f associé au chargement sera de 8,1 pour un moment critique de 37800 kN*m.

Ces valeurs sont approximatives puisqu'elles ne tiennent pas compte des conditions réelles d'appui des panneaux puisque les facteurs k_f sont choisis d'après une plaque simplement supportée sur ses quatre côtés. Les équations ne tiennent pas compte non plus de la continuité de l'âme. Elles sont toutefois un bon indicateur de l'ordre de grandeur du voilement local, comme on peut le constater à la figure 5.12 où on les compare aux moments critiques obtenus des analyses pour différentes configurations.

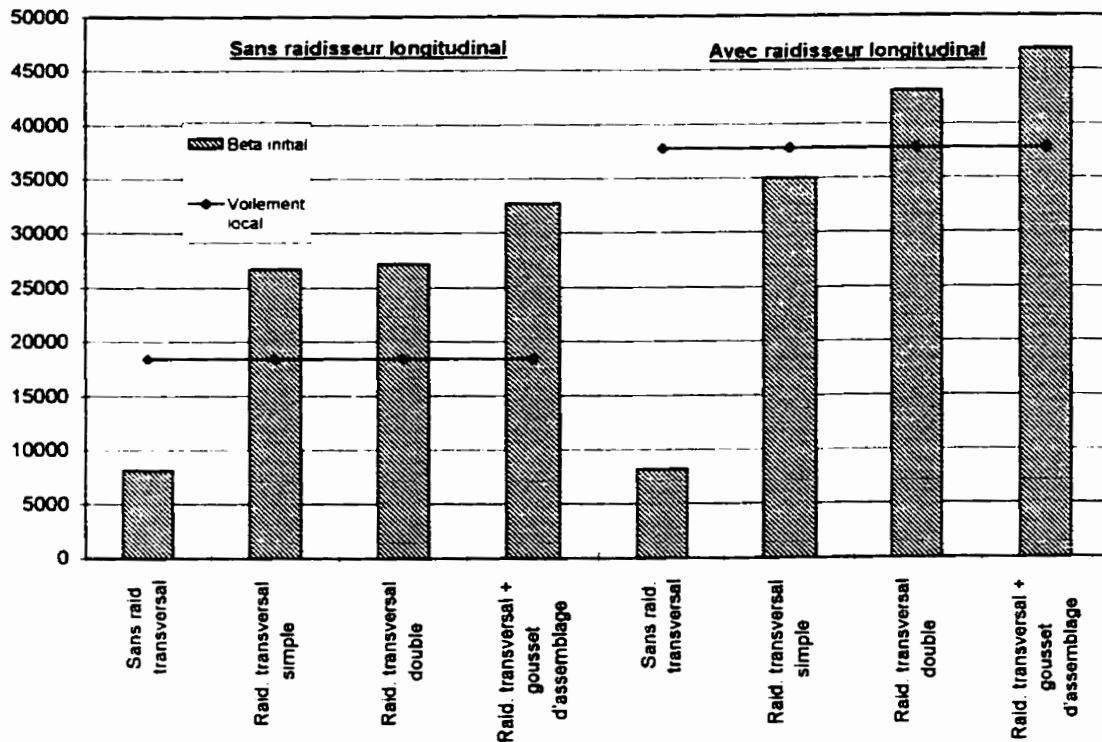


Figure 5.12 : Voilement local comme limite d'utilisation

Ainsi, lorsque le moment critique de déversement se rapprochera des valeurs du moment qui produit le voilement local, ce dernier commencera à apparaître (figure 5.13 à 5.15). Notre modèle sera alors malheureusement inutilisable (voir chapitre 4).

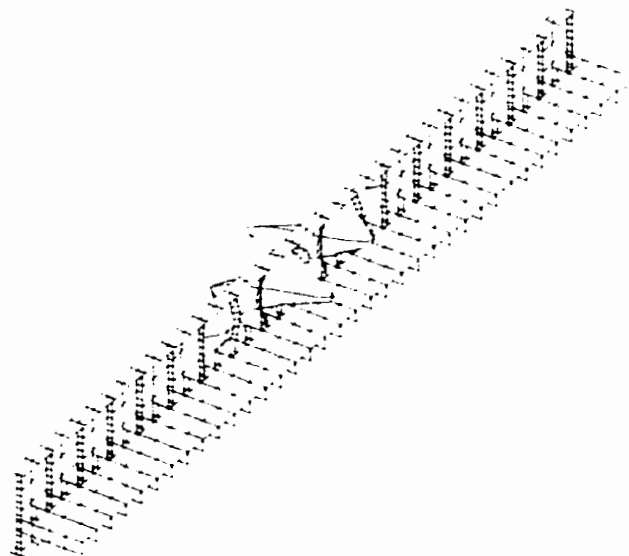


Figure 5.13 : Poutre avec raidisseurs transversaux simples, vue isométrique

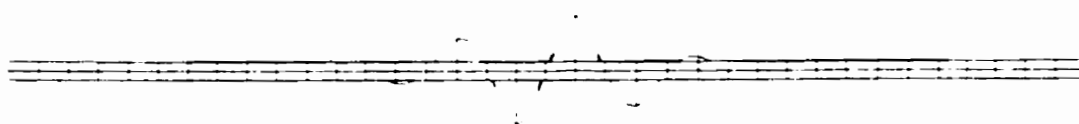


Figure 5.14 : Poutre avec raidisseurs transversaux simples, vue en plan

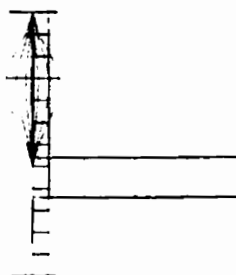


Figure 5.15 : Poutre avec raidisseurs transversaux simples, section

L'ajout d'un raidisseur longitudinal permet donc de retarder l'apparition du voilement local et d'étendre la plage d'utilisation du modèle pour l'étude du déversement.

5.6 Effet des raidisseurs transversaux

Les raidisseurs transversaux viennent, en l'absence des goussets d'assemblage, relier les entretoises à l'âme de la poutre maîtresse. Ils sont la composante stabilisatrice dont l'influence est la plus facilement visualisable. Ainsi, lorsqu'on ajoute un raidisseur d'un seul côté de l'âme, le mode de déversement est radicalement changé depuis le mode de la poutre sans raidisseur. Le déversement obtenu se fait selon un sinusoïde d'une demi-longueur d'onde légèrement inférieure à la portée de la poutre (figures 5.16 à 5.18). Pour obtenir un tel mode de déversement, la présence d'un raidisseur longitudinal est requise, tel que discuté à la section précédente.

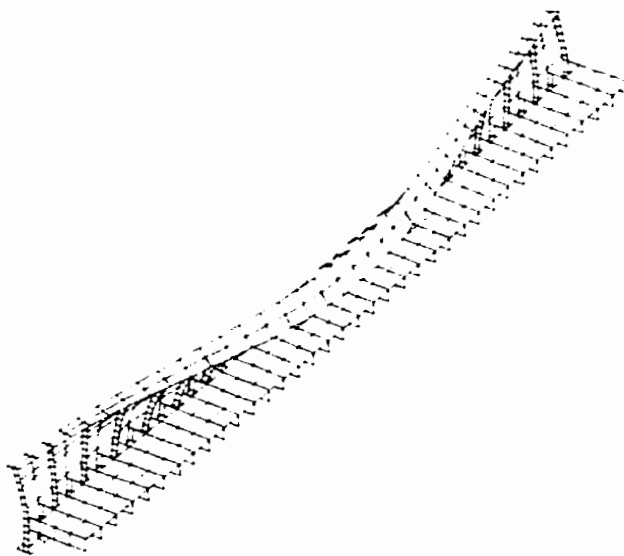


Figure 5.16 : Poutre avec raidisseurs transversaux simples et raidisseur longitudinal, vue isométrique

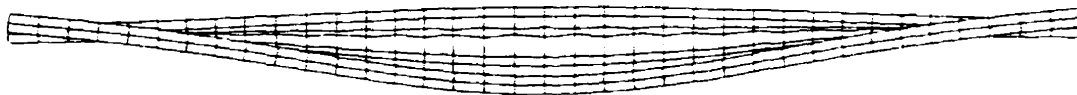


Figure 5.17 : Poutre avec raidisseurs transversaux simples et raidisseur longitudinal, vue en plan

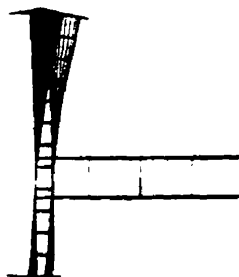


Figure 5.18 : Poutre avec raidisseurs transversaux simples et raidisseur longitudinal, section

Le moment de déversement obtenu est considérablement augmenté. Il passe de 8200 kN*m pour une poutre sans raidisseur transversal à 34960 kN*m pour une poutre avec raidisseurs transversaux d'un seul côté. Les raidisseurs transversaux ont ici des dimensions de 150mm par 16mm et sont espacés de 1400mm. Comme discuté précédemment, cette résistance accrue est due à l'augmentation de la rigidité de l'âme qui permet une utilisation plus efficace de la rigidité des entretoises (équation 5.1).

Pour des raidisseurs transversaux simples, la distorsion est encore bien présente. Les raidisseurs sont en effet fortement déformés. La rigidité de l'âme et des assemblages sont très similaires comme nous l'avons vu au tableau 5.3 puisque la rigidité de l'assemblage a alors sa plus forte influence. La variation de la rigidité des assemblages va

d'ailleurs faire passer le mode de déversement d'un mode où les raidisseurs se déforment peu et où la poutre subit plutôt une rotation autour du tablier (pour une faible rigidité des assemblages, figure 5.19) à un mode où ce sont les raidisseurs qui se déforment en accentuant la distorsion de la poutre qui subit une rotation beaucoup plus faible autour du tablier (pour un assemblage plus rigide, figure 5.20).

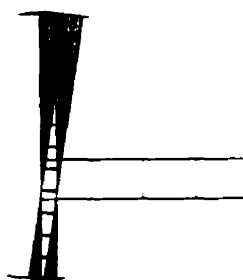


Figure 5.19 : Poutre avec raidisseurs transversaux simples et raidisseur longitudinal, assemblage faible

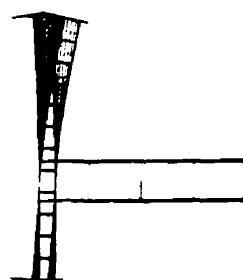


Figure 5.20 : Poutre avec raidisseurs transversaux simples et raidisseur longitudinal, assemblage fort

L'ajout de raidisseurs transversaux de l'autre côté de l'âme pour avoir des raidisseurs de chaque côté vient nous rapprocher du voilement local. En effet, le mode de déversement obtenu est toujours un sinusoïde mais dont la longueur d'onde est plus

courte. La poutre déverse comme si elle comportait une retenue latérale fixe à ses extrémités et à mi-portée (figure 5.21 à 5.23). Le moment de déversement est alors de 43000 kN*m. On remarquera surtout l'apparition du voilement local dans l'âme qui se traduit sous forme de vaguelettes (visible surtout aux figures 5.21 et 5.22) d'un raidisseur transversal à l'autre malgré la présence d'un raidisseur longitudinal. Le mode obtenu est en fait une combinaison de voilement local et de déversement global. Nous arrivons à la limite du voilement local et l'utilisation de raidisseurs plus rigides a une influence qui se fait de moins en moins sentir (voir figure 5.20).

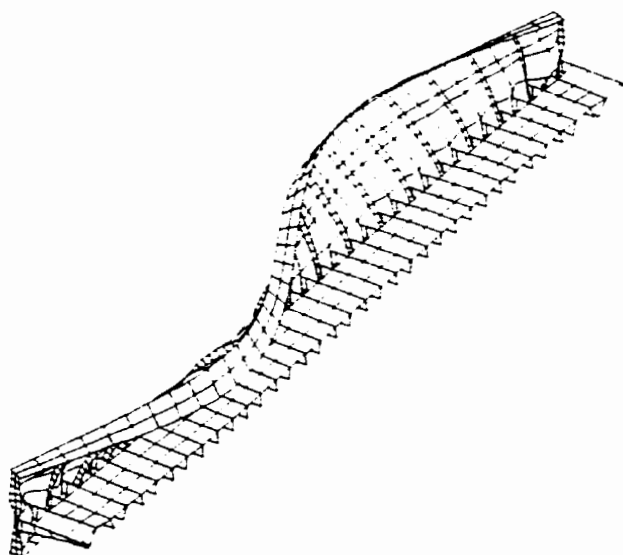


Figure 5.21 : Poutre avec raidisseurs transversaux doubles et raidisseur longitudinal, vue isométrique



Figure 5.22 : Poutre avec raidisseurs transversaux doubles et raidisseur longitudinal, vue en plan

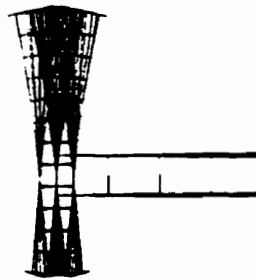


Figure 5.23 : Poutre avec raidisseurs transversaux doubles et raidisseur longitudinal, section

5.7 Effet des goussets d'assemblage

L'ajout des goussets d'assemblage vient considérablement augmenter la rigidité torsionnelle dont bénéficie la poutre maîtresse. Non seulement ils court-circuitent l'assemblage poutre maîtresse-entretoise mais ils viennent augmenter la rigidité des entretoises en raccourcissant la longueur des ces dernières.

Malheureusement, cet effet n'est pas visualisable à partir de notre modèle à cause des problèmes de voilement local discutés plus tôt. Le mode de déversement obtenu est

en effet limité au voilement local du premier panneau, malgré la présence d'un raidisseur longitudinal (figures 5.24 à 5.26). La valeur du moment de déversement plafonne aux alentours de 47000 kN*m, ce qui concorde avec l'estimation du voilement local à 37800 kN*m. On est encore très loin du 280000 kN*m que prévoit la théorie classique du déversement lorsqu'on prend comme longueur non-supportée (L_s) la distance entre les goussets d'assemblage de 2800mm.

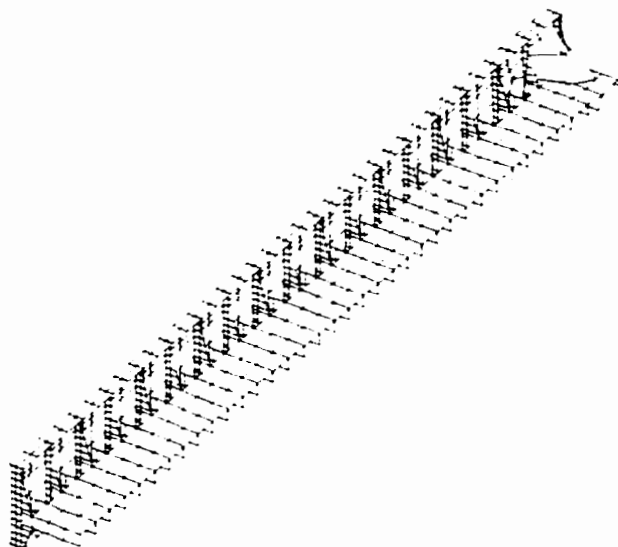


Figure 5.24 : Poutre avec goussets d'assemblage et raidisseur longitudinal, vue isométrique

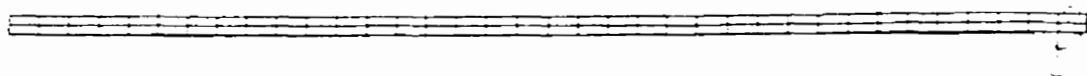


Figure 5.25 : Poutre avec goussets d'assemblage et raidisseur longitudinal, vue en plan

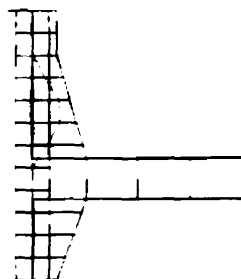


Figure 5.26 : Poutre avec goussets d'assemblage et raidisseur longitudinal, section

5.8 Effet des retenues d'extrémité

Sur les modèles où la rigidité torsionnelle est faible (figure 5.5 à 5.10), on peut voir clairement que les extrémités ne sont pas retenues latéralement. L'utilisation de théories basées sur des extrémités latéralement fixes est alors difficilement justifiable.

Pour des modèles où la rigidité est plus grande, cet effet est de moins en moins perceptible (figure 5.21 à 5.23). Le voilement local nous empêche toutefois de bien apprécier la situation. De plus, comme on se rapproche du cas où toutes les retenues sont absolument efficaces (lorsque le déversement s'effectue entre les supports), il est normal que l'effet des extrémités diminue puisque celles-ci aussi seront absolument efficaces.

CHAPITRE 6

DÉVERSEMENT D'UNE POUTRE AVEC ÂME FLEXIBLE ET POINT DE ROTATION FIXE

6.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre 5 que les poutres d'un pont à tablier inférieur peuvent présenter divers modes de déversement et de voilement local. Nous avons aussi établi quelles sont les diverses composantes impliquées dans le déversement de même que le rôle de chacune.

Nous retiendrons tout d'abord que le déversement des poutres maîtresses est caractérisé par un déplacement horizontal nul au niveau du tablier et par la rotation de la poutre autour de ce point. À cela vient s'ajouter la distorsion qui vient modifier la forme de la poutre et qui accentue cette rotation autour du tablier.

Les raidisseurs et les goussets d'assemblage viennent limiter cette distorsion et viennent ainsi augmenter la résistance de la poutre. De plus, ils viennent permettre le transfert de la rigidité des entretoises aux poutres maîtresses. Celles-ci peuvent alors s'appuyer sur les entretoises qui leur fournissent une retenue contre la rotation autour du tablier.

Différentes méthodes de calcul ont été expliquées au chapitre 2. Nous avons retenu les cinq principales pour lesquelles la relation entre M_{cr} et la rigidité de la retenue est représentée schématiquement à la figure 6.1.

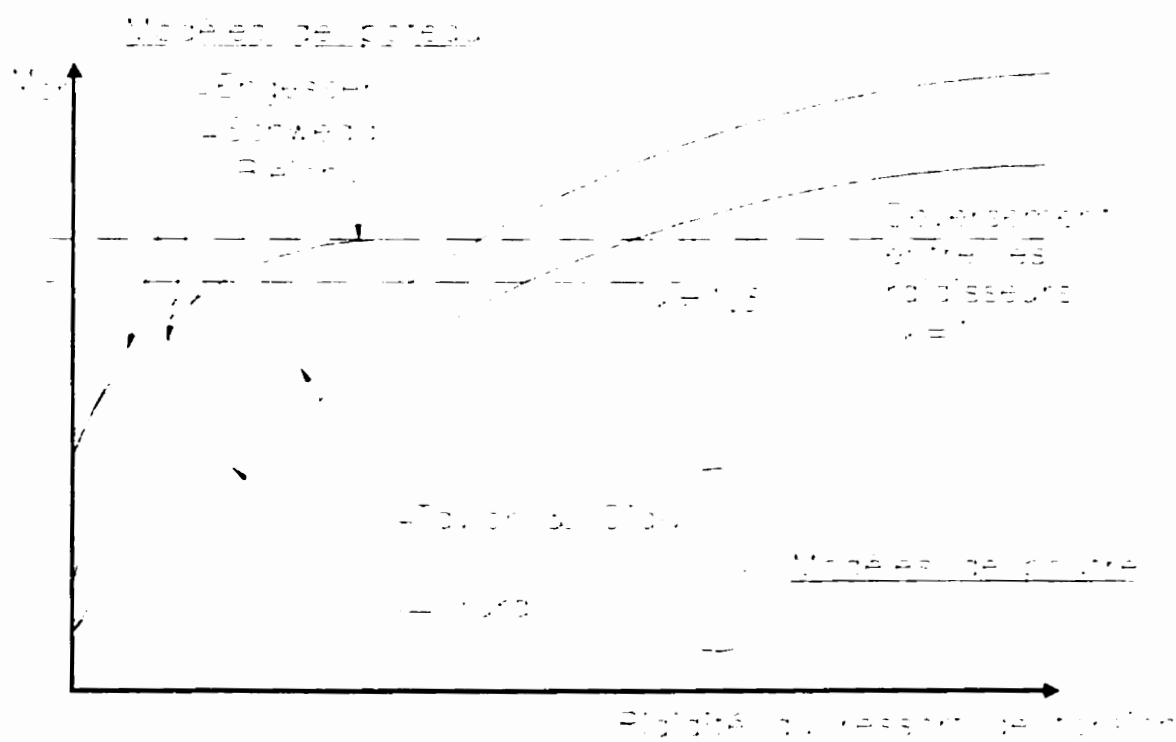


Figure 6.1 : Méthodes de calcul du moment de déversement

Chaque méthode a ses limitations. Les méthodes de Taylor et Ojalvo de même que celle de Yura qui est en dérivée ne permettent pas l'introduction de l'effet du tablier qui force un point de rotation sur la poutre. Alors que la méthode de Taylor et Ojalvo néglige totalement la distorsion, la méthode de Yura en tient compte mais est incorrecte pour de faibles valeurs de rigidité du tablier puisqu'elle se sert de l'approche classique de

Timoshenko (qui elle aussi néglige l'effet de support latéral du tablier) pour déterminer un moment de déversement initial M_0 .

Les trois autres méthodes sont basées sur un modèle de poteau sur appuis élastiques. La méthode la plus simple, celle de Engesser, donne des moments de déversement trop élevés pour de fortes valeurs de rigidité des appuis élastiques. De plus, elle est limitée à une valeur de K supérieure à 1,3.

La méthode de Bleich est par contre valide pour toutes valeurs de K . Elle prédit correctement la limite supérieure qui correspond au déversement de la poutre entre les raidisseurs, ce que les méthodes utilisant un milieu continu plutôt que discret sont incapables de faire.

Finalement, la méthode de Schweda est la seule qui ne suppose pas a priori que les extrémités de la poutre sont retenues latéralement. Cette méthode, tout comme celle d'Engesser, est limitée à une valeur de K supérieure à 1,3.

Ces trois méthodes basées sur un modèle de poteau sur appuis élastiques peuvent permettre l'introduction de la distorsion et de la rigidité des raidisseurs et des assemblages par le choix judicieux de la rigidité des appuis élastiques. Leurs auteurs restent toutefois très superficiels sur la façon d'établir ces rigidités. De plus, ce modèle, en ne conservant que la semelle supérieure, néglige l'effet bénéfique de la semelle inférieure qui, étant tendue, apporte un certain support à l'ensemble de l'ouvrage. De

même, l'effet du gauchissement est négligé puisque, encore une fois, la poutre n'est pas considérée dans son ensemble.

Il serait donc souhaitable de développer une équation basée sur le comportement d'une poutre complète et qui permettrait d'inclure l'effet du tablier et de tenir compte de la distorsion. C'est ce qui sera fait dans ce chapitre où nous développerons, à partir d'une approche énergétique, une méthode pour prédire le moment de déversement d'une poutre qui comporte un point de rotation fixe de même qu'un ressort rotationnel et dont l'âme pourra subir de la distorsion.

Au chapitre suivant, cette équation sera appliquée à des poutres avec raidisseurs. Cette expression pourra alors être utilisée pour déterminer la rigidité minimale des raidisseurs et des assemblages poutres maîtresses-entretoises nécessaires pour prévenir le déversement de la poutre maîtresse.

Cette dérivation se fera pour une poutre dont les extrémités sont retenues latéralement et qui est soumise à un moment constant. Le fait de retenir les extrémités simplifie grandement la résolution du problème. De plus, cette hypothèse est justifiée pour la plupart des ponts réels. Ceux-ci comportent en effet des raidisseurs porteurs à leurs extrémités qui sont généralement beaucoup plus rigides que les raidisseurs transversaux ordinaires. D'après les travaux de Lazard (voir section 2.2.8), une rigidité aux extrémités qui est le double des rigidités intermédiaires est suffisante pour justifier l'utilisation d'extrémités retenues latéralement. L'ingénieur n'aura donc qu'à vérifier que

les raidisseurs porteurs sont effectivement deux fois plus rigides que les raidisseurs intermédiaires qu'il utilise dans le calcul du moment de déversement.

L'utilisation d'un moment constant est, quant à elle, une hypothèse du côté sécuritaire qui est souvent utilisée dans le calcul structural.

La dérivation de la méthode se fera en étapes successives en commençant par négliger la distorsion puis en incluant celle-ci sur une poutre sans ressort rotationnel et sans point de rotation fixe. Suivront ensuite l'ajout du point de rotation fixe puis du ressort rotationnel, ce dernier problème étudié étant celui qui nous intéresse.

Cette méthode considère la poutre comme un milieu continu et néglige l'effet ponctuel des raidisseurs transversaux. Toutefois, son approche qui diffère de celle des autres modèles en milieu continu, ne la rend pas sujette à la limite du K supérieur à 1,3 imposée aux méthodes de Engesser et de Timoshenko.

6.2 Poutres avec point de rotation fixe, avec ressort rotationnel et sans distorsion de l'âme

Bleich (1951) a dérivé l'équation d'énergie d'une poutre bisymétrique dont l'axe de rotation dans le sens longitudinal est imposé. Comme l'approche classique de Timoshenko, il négligea la distorsion de la section. Lorsque cette poutre est soumise à un moment constant, cette équation est:

$$U_p = \frac{1}{2} \int_0^L \left[E(C_w + a_{cg}^2 I_y) \beta''^2 + (GJ) \beta'^2 + 2a_{cg} M \beta \beta' \right] dz \quad (6.1)$$

Dans l'équation 6.1, la distance a_{cg} correspond à la distance entre l'axe de rotation imposé et le centre de gravité de la poutre. Elle est positive lorsque l'axe de rotation est situé sous le centre de gravité.

L'énergie d'un ressort torsionnel de rigidité K_r relié à la poutre est :

$$U_r = \frac{1}{2} \int_{z=0}^{z=L} K_r \beta^2 dz \quad (6.2)$$

L'énergie totale du système est alors :

$$\begin{aligned} U_t &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[E(C_w + a_{cg}^2 I_y) \beta''^2 + (GJ) \beta'^2 + 2a_{cg} M \beta \beta' + K_r \beta^2 \right] dz \\ &= \int_0^L \frac{1}{2} \left[E(C_w + a_{cg}^2 I_y) \beta''^2 + (GJ) \beta'^2 + 2a_{cg} M \beta \beta' + K_r \beta^2 \right] dz \\ &= \int_{z=0}^z F dz \end{aligned} \quad (6.3)$$

Par le calcul variationnel, on peut déterminer l'équation différentielle qui régit alors le problème.

$$\frac{\delta F}{\delta \beta} - \frac{d}{dz} \frac{\delta F}{\delta \beta'} + \frac{d^2}{dz^2} \frac{\delta F}{\delta \beta''} = 0 \quad (6.4)$$

On trouve alors:

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = a_{cx} M \beta''' + K_r \beta \quad (6.5)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial \beta'} = GJ \beta''' \quad (6.6)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial F}{\partial \beta''} = (EC_w + a_{cg}^2 EI_y) \beta^{IV} + a_{cg} M \beta'' \quad (6.7)$$

ce qui nous donne:

$$(EC_w + a_{cg}^2 EI_y) \beta^{IV} + (2a_{cg} M - GJ) \beta'' + K_r \beta = 0 \quad (6.8)$$

Pour une poutre sur appuis simples retenue latéralement à ses extrémités et dont le gauchissement est libre, les conditions frontières sont les suivantes:

$$\beta = \beta'' = 0 \text{ pour } z=0 \text{ et } z=L \quad (6.9)$$

Pour ces conditions frontières, la forme de la solution de l'équation différentielle est :

$$\beta = A \sin\left(m\pi \frac{z}{L}\right) \quad (6.10)$$

$$\beta'' = -A \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \sin\left(m\pi \frac{z}{L}\right) \quad (6.11)$$

$$\beta^{IV} = A \frac{m^4 \pi^4}{L^4} \sin\left(m\pi \frac{z}{L}\right) \quad (6.12)$$

On remplace alors les valeurs de β dans l'équation différentielle, ce qui nous permet de trouver le moment de déversement de la poutre:

$$\left[(EC_w + a_{cg}^2 EI_y) \frac{m^4 \pi^4}{L^4} - (2a_{cg} M - GJ) \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + K_r \right] A \sin\left(m\pi \frac{z}{L}\right) = 0 \quad (6.13)$$

La solution non-triviale de cette équation est:

$$\left[(EC_w + a_{cg}^2 EI_y) \frac{m^4 \pi^4}{L^4} - (2a_{cg} M - GJ) \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + K_r \right] = 0 \quad (6.14)$$

d'où on peut tirer le moment de déversement M'_{uc} :

$$M'_{uc} = \frac{1}{2a_{cg}} \left[\frac{m^2 \pi^2}{L^2} (EC_w + a_{cg}^2 EI_y) + GJ + \frac{K_r L^2}{m^2 \pi^2} \right] \quad (6.15)$$

On retrouve la même équation dans l'ouvrage de Nylander(1956).

On remarquera, en observant l'équation 6.15 que, le mode de déversement n'est pas forcément celui qui correspond à $m=1$. En effet, bien qu'une valeur plus grande de m vienne augmenter le premier terme de rigidité et donc le moment de déversement, l'influence du ressort est réduite et vient alors diminuer le moment de déversement.

On se rappellera que l'équation développée par Taylor et Ojalvo pour une poutre retenue en torsion par un ressort (sans axe de rotation forcée) prédisait que le mode de flambement serait toujours le premier mode. Pour une poutre avec l'axe de rotation forcé, on ne pourra donc pas négliger le calcul des modes supérieurs.

Ainsi, pour une rigidité du ressort nulle, la valeur du moment de déversement sera minimale pour $m=1$. L'augmentation de la rigidité de ce ressort fera passer le mode critique de déversement à $m=2$, $m=3$, $m=4$, ... et ce, en fonction du rapport entre la rigidité du ressort K_r et la rigidité $(EC_w + a_{cg}^2 EI_y)$. Le tableau suivant illustre bien cet effet. Il donne les valeurs du moment de déversement pour la poutre du pont-type pour laquelle on fixe un axe de rotation forcée à une distance de 441 mm sous le centre de gravité ($a_{cg}=441$). Les valeurs ombragées correspondent aux cas critiques pour chaque valeur de K_r .

Tableau 6.1 : Moment de déversement (kN*m) selon l'équation 6.15 pour la poutre du pont-type sans raidisseurs ($a_{cg}=441$)

K_r (kN)	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
0	10400	27582	56220	96312	147858
1000	83351	45820	64325	100871	150777
2000	156303	64058	72431	105431	153695
3000	229254	82296	80537	109990	156613
4000	302205	100534	88642	114549	159531
5000	375156	118772	96748	119109	162449

6.3 Poutres avec âme flexible

6.3.1 Définition des degrés de liberté

Les degrés de liberté sont définis à la figure 6.2.

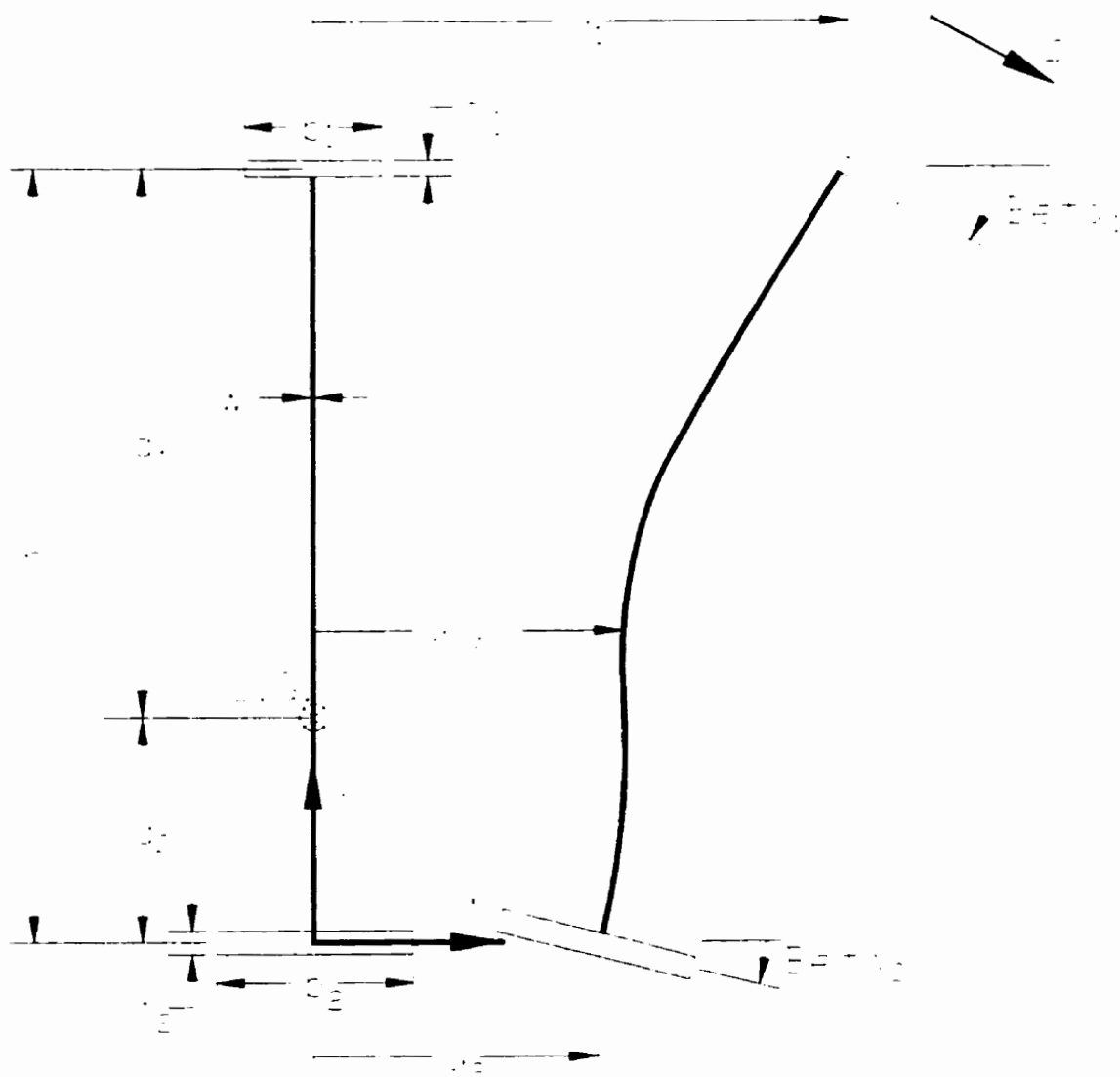


Figure 6.2 : Définition des degrés de liberté

On notera que la dimension h se rapporte ici à la distance séparant le centre de gravité des deux semelles et non pas à la longueur de l'âme entre ces deux dernières. Pour des raisons de simplification, cette nouvelle définition de h sera utilisée tout au long de ce chapitre.

La déformée latérale de l'âme (u) est posée comme étant un polynôme de degré 3 soit le degré le plus élevé pouvant être résolu avec le nombre de degrés de liberté posés.

$$u = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 \quad (6.16)$$

$$\beta = \frac{du}{dy} = b_1 + 2b_2 y + 3b_3 y^2 \quad (6.17)$$

Ce polynôme doit satisfaire les conditions suivantes :

$$\text{à } y=0 : \quad u = u_2 \quad (6.18)$$

$$\beta = \beta_2 \quad (6.19)$$

$$\text{à } y=h : \quad u = u_1 \quad (6.20)$$

$$\beta = \beta_1 \quad (6.21)$$

Sous forme matricielle, cela donne:

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & h^3 \\ 0 & 1 & 2h & 3h^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ \beta_2 \\ u_1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix} \quad (6.22)$$

6.3.2 Énergie interne

6.3.2.1 Semelle supérieure - torsion

$$\frac{1}{2} \int_{z=0}^{z=L} GJ_1 \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial z} \right)^2 dz \quad (6.23)$$

6.3.2.2 Semelle supérieure - déplacement latéral

$$\frac{1}{2} \int_{z=0}^{z=L} EI_{y1} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right)^2 dz \quad (6.24)$$

6.3.2.3 Semelle inférieure - torsion

$$\frac{1}{2} \int_{z=0}^{z=L} GJ_2 \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial z} \right)^2 dz \quad (6.25)$$

6.3.2.4 Semelle inférieure - déplacement latéral

$$\frac{1}{2} \int_{z=0}^{z=L} EI_{y2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right)^2 dz \quad (6.26)$$

6.3.2.5 Âme

On considère l'âme comme une plaque sollicitée dans son plan. L'énergie interne associée à une plaque sollicitée dans son plan vient de Timoshenko (1947):

$$\frac{1}{2} D \int_{z=0}^{z=L} \int_{y=0}^{y=h} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right)^2 \right] \right\} dy dz \quad (6.27)$$

$$D = \frac{Ew^3}{12(1-\nu^2)} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6.28)$$

On peut simplifier les termes et les regrouper pour obtenir l'équation suivante:

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{Ew^3}{12(1-\nu^2)} \int_{z=0}^{z=L} \int_{y=0}^{y=h} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 dy dz + \frac{Ew^3}{12(1-\nu^2)} \int_{z=0}^{z=L} \int_{y=0}^{y=h} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 dy dz \right. \\ \left. + \frac{Ew^3 \nu}{6(1-\nu^2)} \int_{z=0}^{z=L} \int_{y=0}^{y=h} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dy dz + \frac{Gw^3}{3} \int_{z=0}^{z=L} \int_{y=0}^{y=h} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right)^2 dy dz \right\} \quad (6.29)$$

Les deux premiers représentent la flexion selon les deux directions. Le dernier terme est celui de la torsion et l'avant-dernier est particulier aux plaques et représente le couplage entre les deux directions de déformations.

6.3.3 Énergie des charges externes

De façon générale : $V = - \int_A \sigma_z \delta \, dA \quad (6.30)$

$$\delta = \int_{z=0}^{z=L} (ds - dz) \quad (6.31)$$

$$= \int_{z=0}^{z=L} \left(\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} - dz \right)$$

6.3.3.1 Semelle supérieure

On pose tout d'abord (petites déformations) : $\cos \beta_1 \approx 1$
 $\cos(\beta_1 + d\beta_1) \approx 1 \quad (6.32)$

$$dx = \left[(u_1 + du_1) + (s \cdot \cos(\beta_1 + d\beta_1)) \right] - [u_1 + s \cdot \cos \beta_1] \quad (6.33)$$

$$= du_1$$

$$\begin{aligned}
 dy &= [-s \cdot \sin \beta_1] - [-s \cdot \sin(\beta_1 + d\beta_1)] \\
 &= -s(\sin \beta_1) + s(\sin \beta_1 \cos d\beta_1 + \cos \beta_1 \sin d\beta_1) \\
 &= -s \cdot \sin d\beta_1 \\
 &\approx -s \cdot d\beta_1
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

$$\begin{aligned}
 \delta &= \int_{z=0}^{z=L} \sqrt{(du_1)^2 + (-s \cdot d\beta_1)^2 + (dz)^2} - dz \\
 \text{Et donc,} \quad &= \int_{z=0}^{z=L} \left(\sqrt{\left(\frac{du_1}{dz}\right)^2 + s^2 \left(\frac{d\beta_1}{dz}\right)^2 + 1} \right) dz - dz
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

$$\text{Avec l'approximation : } \sqrt{1+x} \approx 1 + x/2 \tag{6.36}$$

$$\text{et les définitions : } \frac{du_1}{dz} = u'_1 \quad \frac{d\beta_1}{dz} = \beta'_1 \tag{6.37}$$

$$\begin{aligned}
 \delta &= \int_{z=0}^{z=L} \left[1 + \frac{1}{2} (u_1'^2 + s^2 \beta_1'^2) \right] dz - dz \\
 \text{Cela nous donne :} \quad &= \int_{z=0}^{z=L} \frac{1}{2} (u_1'^2 + s^2 \beta_1'^2) dz
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

$$\text{La contrainte (positive en compression) vaut : } \sigma_z = \frac{M}{I_x} d_1 \tag{6.39}$$

$$\begin{aligned}
 V_{sem\ sup} &= - \int_A \frac{M d_1}{I_x} \int_{z=0}^{z=L} \frac{1}{2} (u_1'^2 + s^2 \beta_1'^2) dz dA \\
 \text{L'énergie interne est alors de :} \quad &= - \frac{M d_1}{2 I_x} \int_{s=-b_1/2}^{s=b_1/2} t_1 \int_{z=0}^{z=L} (u_1'^2 + s^2 \beta_1'^2) dz ds \tag{6.40} \\
 &= - \frac{M d_1 t_1}{2 I_x} \int_{z=0}^{z=L} \left(u_1'^2 b_1 + \beta_1'^2 \frac{b_1^3}{12} \right) dz
 \end{aligned}$$

6.3.3.2 Semelle inférieure

On applique le même raisonnement à la semelle inférieure : $\cos \beta_2 \approx 1$
 $\cos(\beta_2 + d\beta_2) \approx 1$ (6.41)

$$\begin{aligned} dx &= \left[(u_2 + du_2) + (s \cdot \cos(\beta_2 + d\beta_2)) \right] - [u_2 + s \cdot \cos \beta_2] \\ &= du_2 \end{aligned} \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} dy &= [-s \cdot \sin \beta_2] - [-s \cdot \sin(\beta_2 + d\beta_2)] \\ &= -s(\sin \beta_2) + s(\sin \beta_2 \cos d\beta_2 + \cos \beta_2 \sin d\beta_2) \\ &= -s \cdot \sin d\beta_2 \\ &\approx -s \cdot d\beta_2 \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} \delta &= \int_{z=0}^{z=L} \sqrt{(du_2)^2 + (-s \cdot d\beta_2)^2 + (dz)^2} - dz \\ &= \int_{z=0}^{z=L} \left(\sqrt{\left(\frac{du_2}{dz}\right)^2 + s^2 \left(\frac{d\beta_2}{dz}\right)^2 + 1} \right) dz - dz \end{aligned} \quad (6.44)$$

$$\frac{du_2}{dz} = u'_2 \quad \frac{d\beta_2}{dz} = \beta'_2 \quad (6.45)$$

$$\begin{aligned} \delta &= \int_{z=0}^{z=L} \left[1 + \frac{1}{2} (u'^2_2 + s^2 \beta'^2_2) \right] dz - dz \\ &= \int_{z=0}^{z=L} \frac{1}{2} (u'^2_2 + s^2 \beta'^2_2) dz \end{aligned} \quad (6.46)$$

La contrainte est négative (en traction) : $\sigma_z = -\frac{M}{I_x} d_2$ (6.47)

$$\begin{aligned}
 V_{\text{sem inf}} &= \int_A \frac{M dz}{I_x} \int_{z=0}^{z=L} \frac{1}{2} (u_z'^2 + s^2 \beta_z'^2) dz dA \\
 \text{L'énergie est alors de :} &= \frac{M d_z}{2 I_x} \int_{s=-b_z}^{s=b_z} t_z \int_{z=0}^{z=L} (u_z'^2 + s^2 \beta_z'^2) dz ds \\
 &= \frac{M d_z t_z}{2 I_x} \int_{z=0}^{z=L} \left(u_z'^2 b_z + \beta_z'^2 \frac{b_z^3}{12} \right) dz
 \end{aligned} \tag{6.48}$$

6.3.3.3 Âme

$$dx = du \tag{6.49}$$

$$dy = 0 \tag{6.50}$$

$$\begin{aligned}
 \delta &= \int_{z=0}^{z=L} \sqrt{(du)^2 + 0^2 + (dz)^2} - dz \\
 &= \int_{z=0}^{z=L} \left(\sqrt{\left(\frac{du}{dz} \right)^2 + 1} \right) dz - dz \\
 &= \int_{z=0}^{z=L} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + 1 \right) dz - dz \\
 &= \frac{1}{2} \int_{z=0}^{z=L} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dz
 \end{aligned} \tag{6.51}$$

$$\sigma_z = \frac{M}{I_x} (y - d_z) \tag{6.52}$$

$$\begin{aligned}
 V_{\text{ame}} &= - \int_A \frac{M}{2 I_x} (y - d_z) \int_{z=0}^{z=L} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dz dA \\
 &= - \frac{w M}{2 I_x} \int_{y=0}^{y=h} (y - d_z) \int_{z=0}^{z=L} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dz dy \\
 &= - \frac{w M}{2 I_x} \int_{z=0}^{z=L} \int_{y=0}^{y=h} (y - d_z) \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dy dz
 \end{aligned} \tag{6.53}$$

6.3.4 Énergie potentielle totale

L'énergie potentielle totale (Π) est la somme des énergies internes et de l'énergie des charges externes:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{z=0}^{z=L} \left\{ \begin{aligned} &GJ_1 \beta_1'^2 + GJ_2 \beta_2'^2 + EI_{y1} u_1'^2 + EI_{y2} u_2'^2 \\ &+ \int_{y=0}^{y=h} \frac{Ew^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right)^2 dy + \int_{y=0}^{y=h} \frac{Ew^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dy \\ &+ \int_{y=0}^{y=h} \frac{Ew^3 \nu}{6(1-\nu^2)} \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \frac{d^2 u}{dz^2} \right) dy + \int_{y=0}^{y=h} \frac{Gw^3}{3} \left(\frac{d^2 u}{dy dz} \right)^2 dy \\ &- \frac{Md_1 t_1}{I_x} \left(u_1'^2 b_1 + \beta_1'^2 \frac{b_1^3}{12} \right) + \frac{Md_2 t_2}{I_x} \left(u_2'^2 b_2 + \beta_2'^2 \frac{b_2^3}{12} \right) \\ &- \frac{wM}{I_x} \int_{y=0}^{y=h} (y - d_2) \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dy \end{aligned} \right\} dz \quad (6.54)$$

6.3.5 Résolution de l'équation d'énergie

En posant la forme des degrés de liberté comme étant des sinus d'amplitude A_i , on obtient :

$$\begin{aligned} u_1, u_2, \beta_1, \beta_2 &= A_i \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) & i = 1, 2, 3, 4 \\ u'_1, u'_2, \beta'_1, \beta'_2 &= A_i \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \\ u''_1, u''_2, \beta''_1, \beta''_2 &= -A_i \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \end{aligned} \quad (6.55)$$

Pour obtenir le moment de déversement critique, on cherche les valeurs des degrés de liberté qui minimisent l'énergie potentielle totale du système, ce qui se traduit par les quatre équations suivantes:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = m_{11}(A_1) + m_{12}(A_2) + m_{13}(A_3) + m_{14}(A_4) = 0 \quad (6.56)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = m_{21}(A_1) + m_{22}(A_2) + m_{23}(A_3) + m_{24}(A_4) = 0 \quad (6.57)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \beta_1} = m_{31}(A_1) + m_{32}(A_2) + m_{33}(A_3) + m_{34}(A_4) = 0 \quad (6.58)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \beta_2} = m_{41}(A_1) + m_{42}(A_2) + m_{43}(A_3) + m_{44}(A_4) = 0 \quad (6.59)$$

que l'on exprime sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = 0 \quad (6.60)$$

Une fois les intégrations effectuées , nous obtenons les termes suivants dans la matrice:

$$m_{11} = \frac{6DL}{h^3} + \frac{6}{5} \frac{\pi^2 D\nu}{hL} + \frac{13}{70} \frac{\pi^4 Dh}{L^3} + \frac{\pi^4 EI_{y1}}{2L^3} - \frac{\pi^2 b_1 t_1 d_1 M}{2I_x L} + \frac{13}{70} \frac{\pi^2 h w d_2 M}{I_x L} - \frac{\pi^2 h^2 w M}{7I_x L} + \frac{\pi^2 G w^3}{5hL} \quad (6.61)$$

$$m_{12} = \frac{-6DL}{h^3} - \frac{6}{5} \frac{\pi^2 D\nu}{hL} + \frac{9}{140} \frac{\pi^4 Dh}{L^3} + \frac{9}{140} \frac{\pi^2 h w d_2 M}{I_x L} - \frac{9}{280} \frac{\pi^2 h^2 w M}{I_x L} - \frac{\pi^2 G w^3}{5hL} \quad (6.62)$$

$$m_{13} = \frac{-3DL}{h^2} - \frac{3}{5} \frac{\pi^2 D\nu}{L} - \frac{11}{420} \frac{\pi^4 Dh^2}{L^3} - \frac{11}{420} \frac{\pi^2 h^2 w d_2 M}{I_x L} + \frac{\pi^2 h^3 w M}{56I_x L} - \frac{\pi^2 G w^3}{60L} \quad (6.63)$$

$$m_{14} = \frac{-3DL}{h^2} - \frac{\pi^2 D\nu}{10L} + \frac{13}{840} \frac{\pi^4 Dh^2}{L^3} + \frac{13}{840} \frac{\pi^2 h^2 w d_2 M}{I_x L} - \frac{\pi^2 h^3 w M}{120I_x L} - \frac{\pi^2 G w^3}{60L} \quad (6.64)$$

$$m_{21} = m_{12} \quad (6.65)$$

$$m_{22} = \frac{6DL}{h^3} + \frac{6}{5} \frac{\pi^2 D\nu}{hL} + \frac{13}{70} \frac{\pi^4 Dh}{L^3} + \frac{\pi^4 EI_{y2}}{2L^3} + \frac{\pi^2 b_2 t_2 d_2 M}{2I_x L} + \frac{13}{70} \frac{\pi^2 h w d_2 M}{I_x L} - \frac{3}{70} \frac{\pi^2 h^2 w M}{I_x L} + \frac{\pi^2 G w^3}{5hL} \quad (6.66)$$

$$m_{23} = \frac{3DL}{h^2} + \frac{\pi^2 D\nu}{10L} - \frac{13}{840} \frac{\pi^4 Dh^2}{L^3} - \frac{13}{840} \frac{\pi^2 h^2 w d_2 M}{I_x L} + \frac{\pi^2 h^3 w M}{140I_x L} + \frac{\pi^2 G w^3}{60L} \quad (6.67)$$

$$m_{24} = \frac{3DL}{h^2} + \frac{3}{5} \frac{\pi^2 D\nu}{L} + \frac{11}{420} \frac{\pi^4 Dh^2}{L^3} + \frac{11}{420} \frac{\pi^2 h^2 w d_2 M}{I_x L} - \frac{\pi^2 h^3 w M}{120I_x L} + \frac{\pi^2 G w^3}{60L} \quad (6.68)$$

$$m_{31} = m_{13} \quad (6.69)$$

$$m_{32} = m_{23} \quad (6.70)$$

$$m_{33} = \frac{2DL}{h} + \frac{\pi^2 GJ_1}{2L} + \frac{2}{15} \frac{\pi^2 Dh\nu}{L} + \frac{\pi^4 Dh^3}{210L^3} - \frac{\pi^2 b_1^3 t_1 d_1 M}{24I_x L} + \frac{\pi^2 h^3 w d_1 M}{210I_x L} - \frac{\pi^2 h^4 w M}{336I_x L} + \frac{\pi^2 Gw^3 h}{45L} \quad (6.71)$$

$$m_{22} = \frac{DL}{h} - \frac{\pi^2 Dh\nu}{30L} - \frac{\pi^4 Dh^3}{280L^3} - \frac{\pi^2 h^3 w d_2 M}{280I_x L} + \frac{\pi^2 h^4 w M}{560I_x L} - \frac{\pi^2 Gw^3 h}{180L} \quad (6.72)$$

$$m_{41} = m_{14} \quad (6.73)$$

$$m_{42} = m_{24} \quad (6.74)$$

$$m_{43} = m_{34} \quad (6.75)$$

$$m_{44} = \frac{2DL}{h} + \frac{\pi^2 GJ_2}{2L} + \frac{2}{15} \frac{\pi^2 Dh\nu}{L} + \frac{\pi^4 Dh^3}{210L^3} + \frac{\pi^2 b_2^3 t_2 d_2 M}{24I_x L} + \frac{\pi^2 h^3 w d_2 M}{210I_x L} - \frac{\pi^2 h^4 w M}{560I_x L} + \frac{\pi^2 Gw^3 h}{45L} \quad (6.76)$$

Pour obtenir le moment critique de déversement, il faut alors poser comme étant nul le déterminant de cette matrice, ce qui nous donne quatre racines pour la valeur de M.

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.77)$$

Le moment critique de déversement est alors la plus petite racine positive réelle. La plus petite racine (en valeur absolue) négative correspond au moment de déversement lorsque le moment appliqué est inversé. Pour une poutre bisymétrique, la valeur absolue

de ces deux racines sera la même. Pour une poutre unisymétrique, la racine négative nous donne le moment de déversement pour la poutre inversée.

6.3.6 Poutre avec âme infiniment rigide

La même méthode peut être appliquée à une poutre dont l'âme est infiniment rigide en flexion. Ce faisant, nous éliminons le phénomène de la distorsion et nous devrions retrouver les mêmes résultats que ceux obtenus de la théorie classique de Timoshenko.

Pour éliminer la distorsion, on remplace le polynôme de degré 3 qui sert à décrire la déformée de l'âme par une droite et donc un polynôme de degré 1 :

$$u = b_0 + b_1 y \quad (6.78)$$

Ce polynôme devant toujours satisfaire les équations 6.18 à 6.21, il peut être transformé pour obtenir :

$$u = b_2 + \beta_2 y \quad (6.79)$$

$$\beta_1 = \beta_2 \quad (6.80)$$

L'expression de l'énergie potentielle totale demeure inchangée. La résolution de cette équation se fait aussi de la même façon que précédemment à la différence que le problème ne comportant plus que deux degrés de liberté (u_2 et β_2), la matrice finale obtenue sera de dimensions 2x2.

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.81)$$

$$m_{11} = \frac{\pi^4}{2L^3} (Dh + EI_{y1} + EI_{y2}) + M \frac{\pi^2}{2I_x L} \left(-b_1 t_1 d_1 + b_2 t_2 d_2 + h w d_2 - \frac{w h^2}{2} \right) \quad (6.82)$$

$$m_{12} = m_{21} = \frac{\pi^4}{2L^3} \left(\frac{Dh^2}{2} + EI_{y1} h \right) + M \frac{\pi^2}{2I_x L} \left(-b_1 t_1 d_1 h + \frac{h^2 w d_2}{2} - \frac{w h^3}{2} \right) \quad (6.83)$$

$$\begin{aligned} m_{22} = & \frac{\pi^2}{2L} \left(GJ_1 + GJ_2 + G \frac{h w^3}{3} \right) + \frac{\pi^4}{2L^3} \left(\frac{Dh^3}{3} + EI_{y1} h^2 \right) \\ & + M \frac{\pi^2}{2I_x L} \left(-\frac{b_1^3 t_1 d_1}{12} + \frac{b_2^3 t_2 d_2}{12} - b_1 t_1 h^2 d_1 + \frac{h^3 w d_2}{3} - \frac{w h^4}{4} \right) \end{aligned} \quad (6.84)$$

6.3.7 Résultats numériques

Le tableau 6.2 donne les moments de déversements obtenus de l'équation 6.77 pour diverses sections dont la section du pont-type. On y retrouve également les résultats obtenus du logiciel BASP développée par Choo (1987). Ce logiciel dédié calcule le déversement d'une poutre en incluant la distorsion. Il permet l'incorporation de raidisseurs droits, de ressorts rotationnels et translationnels et d'appuis hors-plan et dans le plan de l'âme de la poutre. Ce logiciel a été utilisé par Yura (1993) comme outil de validation pour sa méthode.

Tableau 6.2 : Moments de déversement pour diverses poutres à âme flexible

M_{cr} (kN*m)	Timoshenko	Polynôme de degré 1	BASP	Polynôme de degré 3
W250x167 (L=12000)	832	832	784	830
W610x84 (L=12000)	131	131	130	131
WWF1200x263 (L=12000)	1180	1180	1150	1170
Poutre type (L=25200)	4740	4740	4190 (ADINA: 4340)	4560
Poutre type;w=8 (L=25200)	4680	4680	3610	3950
Poutre unisymétrique	307 -105	307 -105	306 -98	306 -104

La poutre unisymétrique mentionnée au tableau 6.2 est tirée de l'ouvrage de Picard et Beaulieu (1991). Les dimensions de la semelle supérieure sont de 320 x 15, la semelle inférieure mesure 160 x 15 et la distance entre le centre de gravité des semelles est de 560 alors que l'épaisseur de l'âme est de 8 mm. Les auteurs ont calculé le moment de déversement pour cette poutre, qui est de 307 kN*m, et pour la même poutre inversée de haut en bas, ce qui donne 105 kN*m. La longueur de cette poutre est de 13500 mm.

On remarquera au tableau 6.2 que lorsque la distorsion est empêchée, l'approche énergétique employée donne exactement le même résultat que l'équation classique de Timoshenko (équation 2.9).

L'introduction du polynôme de degré 3 pour simuler la distorsion semble fonctionner correctement; plus l'âme est mince, plus le moment de déversement diminue. Cette affirmation est facile à constater en comparant les résultats pour la poutre du pont-type et pour la même poutre avec une épaisseur d'âme de 8 mm, soit la moitié de l'épaisseur de départ de 16 mm. Un polynôme de degré un impose une courbure constante de l'âme de la poutre. Cette courbure constante correspond à une variation constante du moment sur l'âme de la poutre. Or, aucune charge latérale n'étant appliquée directement sur l'âme de la poutre mais plutôt au niveau des semelles, le moment produisant la distorsion dans l'âme de la poutre ne peut que varier de façon linéaire.

La comparaison entre les logiciels BASP, ADINA et la méthode énergétique est un peu moins bonne. Les deux logiciels, tous deux basés sur la théorie des éléments finis donnent constamment des moments de déversement plus faible. Cet état de choses a déjà été souligné (voir sections 5.2 et B.2.2) lorsque le logiciel ADINA donnait un moment de déversement de 4% inférieur à la théorie classique, même lorsque la distorsion était empêchée. La différence entre les deux logiciels et la méthode énergétique reste toutefois réduite avec des différences maximales de l'ordre de 5% pour les poutres de dimensions habituelles (W250x167, W610x84, WWF1200x263) et augmente aux environs de 9% à 10% pour des poutres très élancées. Aucune explication n'a pu être avancée et validée pour déterminer la cause de ces différences.

6.4 Poutres avec point de rotation fixe et âme flexible

L'approche énergétique utilisée à la section précédente peut être modifiée pour incorporer l'effet d'un point de rotation fixe. Ce point de rotation fixe vient en fait nous donner une équation supplémentaire pour décrire la déformée de l'âme de la poutre car nous posons que la poutre ne se déplace pas latéralement vis-à-vis de ce point.

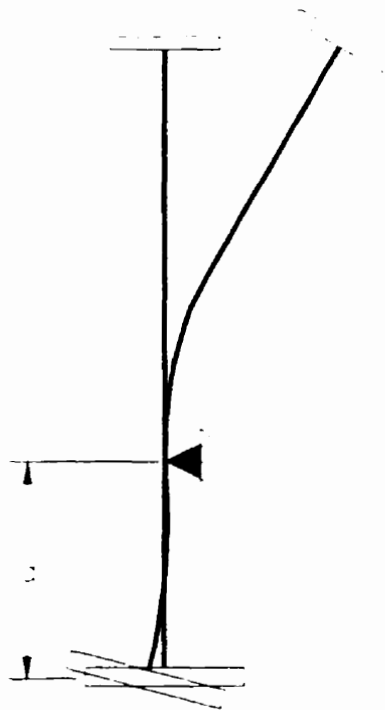


Figure 6.3 : Imposition d'un point de rotation fixe

Cet axe de rotation forcée se traduit par l'équation suivante:

$$y=a : u = 0 \quad (6.85)$$

Cette équation, combinée aux équations 6.18 à 6.21, requiert l'utilisation d'un polynôme de degré 4 pour pouvoir représenter adéquatement la problème.

$$u = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4 \quad (6.86)$$

Le reste de la démarche à effectuer est en tout point identique à celle de la section précédente. Les termes qui composeront la matrice de dimensions 4 x 4 seront bien sûr différents. Ces termes, beaucoup plus complexes, sont donnés à l'annexe D.

6.4.1 Poutre avec âme infiniment rigide

Nous avons vu que l'on peut éliminer l'effet de la déformation de l'âme dans son plan en introduisant un polynôme de degré 1 pour décrire la déformée latérale de la poutre. Avec cette même approche, on peut également résoudre le problème de la poutre avec point de rotation fixe. On incorpore alors l'équation 6.85 dans les équations 6.79 et 6.80. Il en résulte que la déformée de l'âme est décrite par l'équation suivante:

$$u = \beta_1 (y - a) \quad (6.87)$$

Le problème ne dépend plus alors que d'un seul degré de liberté, à savoir la rotation de la poutre. La résolution de l'équation de l'énergie potentielle totale (équation 6.54) se fait de la même façon en posant retenant une fonction sinusoïdale pour β_2 . Comme il n'y a qu'un seul degré de liberté, la matrice obtenue est de dimensions 1 x 1 et est en fait une seule équation que voici:

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi^2}{2L} \left(GJ_1 + GJ_2 + \frac{Ghw^3}{3} \right) + \frac{\pi^4}{2L^3} \left(a^2 Dh - aDh^2 + \frac{Dh^3}{3} + EI_{y1}(a-h)^2 + EI_{y2}a^2 \right) \\
& + \frac{\pi^2 M}{2I_x L} \left(-b_1 t_1 d_1 (a-h)^2 - \frac{b_1^3 t_1 d_1}{12} + b_2 t_2 d_2 a^2 + \frac{b_2^3 t_2 d_2}{12} \right. \\
& \left. + hw \left(a^2 d_2 - \frac{ha^2}{2} - had_2 + \frac{2h^2 a}{3} + \frac{h^2 d_2}{3} - \frac{h^3}{4} \right) \right) = 0
\end{aligned} \tag{6.88}$$

6.4.2 Résultats numériques

Cette approche a été appliquée pour la poutre du pont type en posant la retenue latérale sur l'âme au tiers inférieur de l'âme ($a=881$). Les résultats obtenus sont regroupés au tableau 6.3. Ce tableau contient également les valeurs obtenues par BASP et ADINA. Les résultats classés sous le titre "avec distorsion" considèrent la déformation de l'âme alors que ceux sous le titre "sans distorsion" supposent une âme rigide. La méthode énergétique sans distorsion est celle présentée à la section 6.2. Pour le logiciel BASP, la distorsion a été éliminée en rajoutant des raidisseurs de dimensions 450x16 espacés de 1600 mm à la poutre. Pour le logiciel ADINA, on a empêché la distorsion en imposant le même angle de rotation à tous les noeuds situés à une même distance le long de la poutre (voir annexe B).

Tableau 6.3 : Moments de déversement (kN*m) pour la poutre du pont-type avec point de rotation fixe (a=881)

Sans distorsion		Avec distorsion	
Méthode énergétique	10400	---	---
Polynôme de degré 1	10400	Polynôme de degré 4	7700
BASP	10370	BASP	6840
ADINA	8500	ADINA	6720

De la même façon qu'à la section 6.3, on remarquera que les logiciels d'éléments finis prédisent un moment de déversement plus faible que celui prédit par la méthode énergétique avec des différences toujours de l'ordre de 10% à 20%. La tendance indiquée par les différentes méthodes est toutefois constante, à savoir que la distorsion vient considérablement réduire le moment de déversement de la poutre. Cette affirmation est également confirmée au tableau 6.4 où la méthode énergétique et les deux logiciels sont appliqués sur différentes sections et pour différentes positions de l'axe de rotation imposé, mesurées par rapport à la semelle inférieure (figure 6.3).

On remarquera également sur le tableau 6.3 que la méthode énergétique (section 6.2) et l'utilisation d'un polynôme de degré 1 sont équivalentes.

Tableau 6.4 : Moment de déversement (kN*m) pour des poutres avec point de rotation imposé

Point de rotation	Méthode	Pont-type	Pont-type w=8	W250x167	W610x84	WWF1200x263
a=h/2	Degré 4	13600	6640	36700	1690	6240
	BASP	11800	5220	---	---	---
	ADINA	10500	5990	---	---	---
a=h/3	Degré 4	7710	4990	5830	296	2250
	BASP	6720	4300	5500	293	2170
	ADINA	6730	4690	---	---	---
a=h/6	Degré 4	5510	4240	3000	173	1430
	BASP	4910	3850	2820	171	1390
	ADINA	5070	4090	---	---	---

6.5 Poutres avec point de rotation fixe, ressort rotationnel et âme flexible

L'ajout d'un ressort rotationnel de rigidité K_r au point de rotation vient quelque peu compliquer le problème. À cet endroit en effet se produira une discontinuité dans la fonction qui décrit la déformée. Cette discontinuité provient du ressort qui, en appliquant sur l'âme de la poutre un moment de torsion, vient modifier ponctuellement le diagramme de moment de flexion et, par conséquent, la courbure de l'âme. La pente et la déformée de l'âme sont par contre continues au point de rotation.

Pour inclure cette discontinuité au niveau de la courbure, le polynôme de degré 4 est remplacé par deux polynômes, un pour la partie supérieure au point de rotation (u_{sup})

et un pour la partie inférieure (u_{inf}). Le nombre de conditions frontières est suffisant pour définir deux polynômes de degré 3.

$$u_{\text{inf}} = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 \quad (6.89)$$

$$\beta_{\text{inf}} = \frac{du_{\text{inf}}}{dy} = b_1 + 2b_2 y + 3b_3 y^2 \quad (6.90)$$

$$u_{\text{sup}} = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 \quad (6.91)$$

$$\beta_{\text{sup}} = \frac{du_{\text{sup}}}{dy} = c_1 + 2c_2 y + 3c_3 y^2 \quad (6.92)$$

Les conditions auxquelles doivent répondre les deux polynômes sont les suivantes:

$$\text{à } y=0 : \quad u_{\text{inf}} = u_2 \quad (6.93)$$

$$\beta_{\text{inf}} = \beta_2 \quad (6.94)$$

$$\text{à } y=a : \quad u_{\text{inf}} = 0 \quad (6.95)$$

$$u_{\text{sup}} = 0 \quad (6.96)$$

$$\beta_{\text{inf}} - \beta_{\text{sup}} = 0 \quad (6.97)$$

$$\frac{d\beta_{\text{inf}}}{dy} - \frac{d\beta_{\text{sup}}}{dy} - R\beta_{\text{inf}} = 0 \quad (6.98)$$

$$\text{à } y=h : \quad u_{\text{sup}} = u_1 \quad (6.99)$$

$$\beta_{\text{sup}} = \beta_2 \quad (6.100)$$

Dans l'équation 6.98, la constante correspond au rapport de la rigidité du ressort K_r et de la rigidité en flexion de l'âme

$$R = K_r \left(\frac{12}{Ew^3} \right) \quad (6.101)$$

Les équations 6.93 à 6.100 peuvent être représentés sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 & 0 & -1 & -2a & -3a^2 \\ 0 & -R & 2-2Ra & 6a-3Ra^2 & 0 & 0 & -2 & -6a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h & h^2 & h^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2h & 3h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ \beta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix} \quad (6.102)$$

Le développement de l'équation de l'énergie potentielle totale est identique à celui présenté à la section 6.3. On vient toutefois ajouter le terme de l'énergie accumulée dans le ressort qui est :

$$\frac{1}{2} \int_{z=0}^{z=L} K_r \beta_{y=a}^2 dz = \frac{1}{2} \int_{z=0}^{z=L} K_r (b_1 + 2b_2 a + 3b_3 a^2)^2 dz \quad (6.103)$$

Le reste de la démarche est identique à celui de la section 6.3 à la différence que les intégrations de la déformée de l'âme (u) sur la profondeur de celle-ci, soit les intégrales sur y pour y variant de 0 à h devront se faire en deux parties. La première partie en utilisant u_{inf} pour y variant de 0 à a et la seconde en utilisant u_{sup} pour y variant de a à h . Il en ira de même pour les intégrations des dérivées de u . On devra de plus tenir compte des modes supérieurs de déversement en ajoutant le terme m dans les fonctions décrivant les degrés de liberté :

$$\begin{aligned}
u_i, u_i', \beta_i, \beta_i' &= A_i \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) & i = 1, 2, 3, 4 \\
u_i', u_i'', \beta_i', \beta_i'' &= A_i \frac{m\pi}{L} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \\
u_i'', u_i''', \beta_i'', \beta_i''' &= -A_i \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)
\end{aligned} \tag{6.104}$$

La matrice obtenue sera de dimensions 4 x 4 puisqu'il n'y a toujours que quatre degrés de liberté pour décrire le problème. Les termes de la matrice sont par contre beaucoup trop volumineux pour figurer dans ce mémoire ou même dans ses annexes. La personne désirant utiliser cette approche devra se résoudre à utiliser des logiciels de calcul mathématique tels que Mathematica (Wolfram, 1991) ou Maple (Waterloo Maple Software, 1994) qui se chargeront d'effectuer les diverses intégrations et de résoudre numériquement le déterminant de la matrice. On retrouvera à l'annexe E les fichiers d'entrée utilisés pour résoudre le problème sur le logiciel Mathematica.

6.5.1 Poutre avec âme infiniment rigide

En considérant l'âme comme étant infiniment rigide, le problème est le même qu'à la section 6.4.1 sauf que l'équation 6.88 doit être modifiée pour inclure l'énergie de déformation du ressort. Comme discuté à la section 6.2, on doit également ajouter le terme m dans l'équation pour tenir compte des modes supérieurs qui, à cause du l'ajout du ressort, peuvent être les modes présentant le moment de déversement le plus faible.

$$\begin{aligned} & \frac{m^2 \pi^2}{2L} \left(GJ_1 + GJ_2 + \frac{Ghw^3}{3} \right) + \frac{m^4 \pi^4}{2L^3} \left(a^2 Dh - aDh^2 + \frac{Dh^3}{3} + EI_{y1}(a-h)^2 + EI_{y2}a^2 \right) \\ & + \frac{\pi^2 m^2 M}{2I_x L} \left(-b_1 t_1 d_1 (a-h)^2 - \frac{b_1^3 t_1 d_1}{12} + b_2 t_2 d_2 a^2 + \frac{b_2^3 t_2 d_2}{12} \right. \\ & \left. + hw \left(a^2 d_2 - \frac{ha^2}{2} - had_2 + \frac{2h^2 a}{3} + \frac{h^2 d_2}{3} - \frac{h^3}{4} \right) \right) + \frac{K_r L}{2} = 0 \end{aligned}$$

(6.105)

Cette équation est équivalente à l'équation 6.14 lorsque l'on prend une section bisymétrique. Nous avons déjà vu au tableau 6.3 que les deux approches étaient équivalentes pour une poutre sans ressort rotationnel. Or, le terme supplémentaire $K_r L/2$ est le même que celui présent dans l'équation 6.14. Pour retrouver ce terme, il suffit de multiplier l'équation 6.14 par $L/2$. L'équation étant égale à zéro, ceci n'aura aucun effet sur le résultat final. On remarquera ainsi la similitude entre les équations 6.14 et 6.105.

Le tableau suivant vient confirmer l'équivalence des deux équations. La différence minime entre les résultats vient de l'évaluation de C_w dans l'équation 6.14 qui se fait à l'aide d'équations approximatives.

Tableau 6.5 : Moment de déversement (kN*m) pour des poutres à âmes infiniment rigides avec point de rotation imposé et ressort rotationnel

Section	Équation 6.14	Équation 6.105
Pont type; $a=h/3$; $K_r=5$ kN*mm/mm	10764	10773
Pont type; $a=h/3$; $K_r=50$ kN*mm/mm	14047	14061
Pont type; $a=h/3$; $K_r=500$ kN*mm/mm	36701 (m=2)	36728 (m=2)
Pont type; $w=8$; $a=h/3$; $K_r=5$ kN*mm/mm	6100	6103
Pont type; $w=8$; $a=h/3$; $K_r=50$ kN*mm/mm	7742	7746
Pont type; $w=8$; $a=h/3$; $K_r=500$ kN*mm/mm	21637 (m=2)	21647 (m=2)

6.5.2 Résultats numériques

Le tableau 6.6 fait la comparaison entre l'utilisation de deux polynômes de degré 3 et un polynôme de degré 4. Le point de rotation fixe est à $a=h/3$ et la rigidité du ressort y est bien sûr nulle ($K_r=0$) pour pouvoir effectuer la comparaison.

Tableau 6.6 : Moment de déversement (kN*m) pour des poutres avec point de rotation fixe et âmes flexibles

Section	2 polynômes de degré 3	1 polynôme de degré 4
Pont type	7640	7710
Pont type; $w=8$	4920	4990
W250x167	5790	5830
W610x84	295	296
WWF1200x263	2240	2250

On remarquera que les deux approches sont à toutes fins pratiques équivalentes pour une rigidité de ressort nulle.

Les tableaux 6.7, 6.8 et 6.9 regroupent les résultats obtenus pour des poutres auxquelles est attaché un ressort rotationnel de rigidité variable. Les résultats sont obtenus par la méthode énergétique en posant 2 polynômes de degré 3 et par les logiciels BASP et ADINA. Est également indiqué sur ce tableau le mode de déversement, le mode critique étant le premier ($m=1$) lorsque aucun mode n'est spécifié. On se rappellera que pour une poutre avec un point de rotation imposé et retenue par un ressort rotationnel, le mode critique n'est pas toujours le premier mode.

Tableau 6.7 : Moment de déversement (kN*m) pour des poutres avec point de rotation imposé et ressort rotationnel selon la méthode énergétique

Section (a=h/3)	$K_r=0$	$K_r=5$ kN*mm/mm	$K_r=50$ kN*mm/mm	$K_r=500$ kN*mm/mm
Pont-type	7640	7830	9700	18700
Pont-type ;w=8	4920	5080	7300	6140
W250x167	5790	6310 (m=2)	7290 (m=3)	9776 (m=5)
W610x84	295	638	1240 (m=2)	1886 (m=3)
WWF1200x263	2240	2380	3620	7160 (m=3)

Tableau 6.8 : Moment de déversement (kN*m) pour des poutres avec point de rotation imposé et ressort rotationnel selon le logiciel BASP

Section (a=h/3)	$K_r=0$	$K_r=5$ kN*mm/mm	$K_r=50$ kN*mm/mm	$K_r=500$ kN*mm/mm
Pont-type	6720	6910	8180	11460
Pont-type ;w=8	4300	4380	4690	4910
W250x167	5500	6340	8580 (m=2)	13000 (m=3)
W610x84	293	627	1110 (m=2)	1593 (m=3)
WWF1200x263	2170	2310	3380	5950 (m=2)

Tableau 6.9 : Moment de déversement (kN*m) pour des poutres avec point de rotation imposé et ressort rotationnel selon le logiciel ADINA

Section (a=h/3)	$K_r=0$	$K_r=5$ kN*mm/mm	$K_r=50$ kN*mm/mm	$K_r=500$ kN*mm/mm
Pont-type	6730	6890	8010	10900
Pont-type ;w=8	4690	4800	5000	5140

On remarquera aux trois tableaux précédents, encore une fois, que les éléments finis prédisent un moment de déversement inférieur à la méthode énergétique. Les ordres de grandeur et les tendances sont par contre respectées à l'exception de la section W250x167 pour laquelle BASP donne des moments de déversement supérieurs. Les modes de déversement pour cette section sont aussi faussés. Toutefois, il s'agit là d'une section plutôt trapue et il est peu vraisemblable qu'une telle section soit retenue par un point de rotation fixe. De plus, pour cette section, nous sommes très près de la limite de convergence du logiciel BASP, ce qui peut expliquer les disparités des moments pour cette section qui déverse selon des modes plutôt élevés ($m=5$).

CHAPITRE 7

DÉVERSEMENT D'UNE POUTRE RAIDIE

Dans ce chapitre, nous allons développer une méthode pour calculer le moment de déversement d'une poutre munie de raidisseurs transversaux et dont l'axe de rotation longitudinal est imposé. Ce développement devra tenir compte de la distorsion possible de l'âme de la poutre.

Nous avons vu au chapitre 5 que les raidisseurs transversaux viennent diminuer la distorsion de l'âme. Ils permettent de ce fait de tirer profit au maximum de l'effet du tablier qui vient imposer un point de rotation fixe et de la rigidité des entretoises qui fournissent l'équivalent d'un ressort travaillant en torsion.

Le développement des équations du chapitre 6 ne permet pas l'inclusion de raidisseurs transversaux. Pour pallier à cet inconvénient, nous transformerons les raidisseurs en une épaisseur équivalente de l'âme de la poutre

7.1 Raidisseurs de profondeur constante

La transformation des raidisseurs en une épaisseur d'âme équivalente est basée sur l'hypothèse que la distorsion est uniquement reliée à la rigidité en flexion de l'âme sur son

épaisseur. On choisira donc une épaisseur d'âme équivalente qui donne la même rigidité flexionnelle que pour l'âme avec ses raidisseurs. La contribution des raidisseurs dépendra donc de leur rigidité et de leur espacement, dénoté s . On obtient alors l'équivalence suivante :

Rigidité équivalente = Rigidité avec raidisseurs

$$E \frac{s w_{eq}^3}{12} = E \frac{s w^3}{12} + E \frac{t_s b_s^3}{12} \quad (7.1)$$

$$\Rightarrow w_{eq} = \sqrt[3]{w^3 + \frac{t_s b_s^3}{s}}$$

Pour effectuer la validation de cette approche, le logiciel BASP a été utilisé sur différentes sections et pour différentes configurations de raidisseurs, de position du point de rotation imposé et de rigidité du ressort de torsion.

Dans un premier temps, l'hypothèse de la rigidité latérale comme facteur prédominant est vérifiée. L'équation 7.1 prédit qu'un raidisseur dont on double l'épaisseur est équivalent à un raidisseur dont la profondeur est multipliée par la racine cubique de 2, soit 1,26. De même, un raidisseur quatre fois plus mince sera l'équivalent d'un raidisseur dont la profondeur est multipliée par la racine cubique de 1/4, soit 0,63. Ces résultats sont parfaitement confirmés au tableau 7.1 pour deux poutres différentes.

Tableau 7.1 : Effet des dimensions des raidisseurs

Section	b_r (mm)	t_r (mm)	M_{cr} (BASP) (kN*m)
Poutre type ($a=h/3$; $K_r=50\text{kN}\cdot\text{mm}/\text{mm}$ 16 raidisseurs)	100	16	10800
	126	8	10800
	159	4	10800
WWF1200x263 ($a=h/3$; $K_r=50\text{kN}\cdot\text{mm}/\text{mm}$ 16 raidisseurs)	100	1	3540
	79	2	3540
	63	4	3540

Notre définition d'épaisseur d'âme équivalente prédit également une équivalence entre l'espacement des raidisseurs et leur profondeur. En effet, l'utilisation de raidisseurs deux fois plus épais pour un espacement double nous donne les mêmes résultats. Il en va de même pour des raidisseurs quatre fois plus épais, et ainsi de suite. On peut voir au tableau 7.2 que cette relation est respectée. Cet effet est particulièrement évident pour la section WWF1200x263. Les sections utilisées au tableau 7.2 sont les mêmes que celles du tableau 7.1, à savoir des poutres dont l'axe de rotation est forcé au tiers de la profondeur et qui sont munies d'un ressort rotationnel de $50 \text{ kN}\cdot\text{mm}/\text{mm}$.

**Tableau 7.2 : Moments de déversement (kN*m) pour une variation de l'espacement
et des dimensions des raidisseurs**

Section	Espacement des raidisseurs	Dimensions des raidisseurs		
		100x16	100x8	100x4
Poutre type	L/16	10830	9980	9310
	L/8	10080	9420	8950
	L/4	9540	9080	8750
	L/2	9190	8880	8640
WWF1200x263	L/16	4130	3950	3790
	L/8	3950	3790	3650
	L/4	3790	3650	3550
	L/2	3630	3540	3490

Les deux figures suivantes, 7.1 et 7.2, ont été obtenues pour la poutre de notre pont type pour un point de rotation imposé au tiers de la profondeur ($a=h/3$) et pour un ressort dont la rigidité est de 50 kN*mm/mm. La figure 7.1 nous montre l'effet de l'augmentation de l'épaisseur de l'âme alors que la figure 7.2 nous montre l'effet de l'augmentation de la profondeur (b_s) des raidisseurs. Ceux-ci sont d'une épaisseur de 8 mm et sont espacés de 1575 mm, soit le seizième de la portée de la poutre. Les résultats de ces deux figures sont obtenues de BASP.

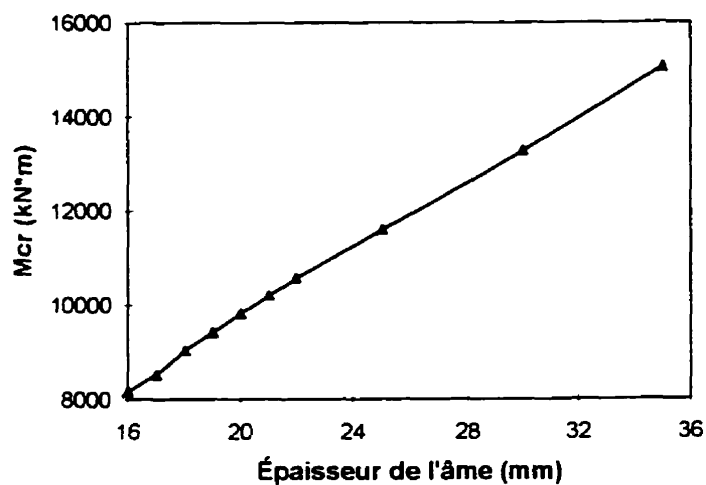


Figure 7.1 : Effet de l'augmentation de l'épaisseur de l'âme sur la poutre type
($a=h/3$; $K_r = 50 \text{ kN*mm/mm}$) par BASP

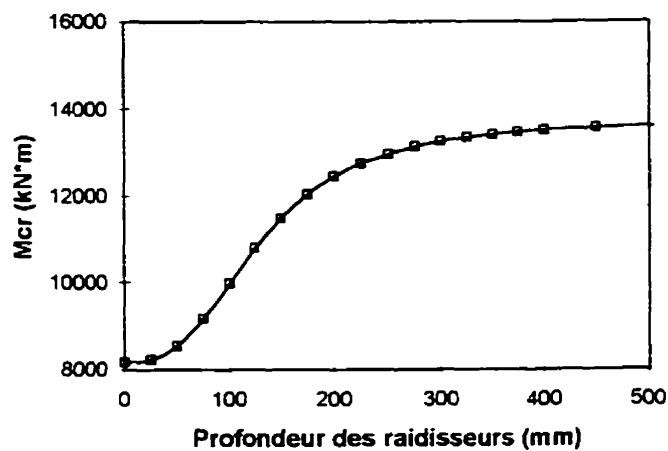


Figure 7.2 : Effet de la profondeur des raidisseurs sur la poutre type ($a=h/3$; $K_r =$
 50 kN*mm/mm ; raidisseurs : $t_s=8 \text{ mm}$, $s=1575 \text{ mm}$) par BASP

On remarquera que l'augmentation de l'épaisseur de l'âme produit une augmentation constante de M_{cr} alors que l'augmentation des raidisseurs donne un moment de déversement qui plafonne.

Lorsque le moment associé à une augmentation de la profondeur des raidisseurs plafonne, c'est que ceux-ci bloquent totalement la distorsion et qu'une augmentation supplémentaire de b_r est alors inutile. Ce plafonnement correspond d'ailleurs à la valeur obtenue de l'équation 6.15 qui est de 14050 kN*m. On se rappellera que l'équation 6.15 nous donne le moment de déversement d'une poutre avec un point de rotation imposé et munie d'un ressort rotationnel mais dont l'âme est infiniment rigide (et donc où la distorsion est empêchée).

La figure 7.2 nous montre un plafonnement aux environs de 13500 kN*m soit 4% plus faible que la valeur attendue mais on se rappellera que les logiciels basés sur les éléments finis donnent en général un résultat légèrement inférieur à celui des méthodes énergétiques.

Par contre, une augmentation de l'épaisseur de l'âme entraîne une augmentation constante du moment de déversement (figure 7.1). En augmentant cette épaisseur, on vient limiter la distorsion de l'âme mais on vient également modifier la section de la poutre qui perd ses caractéristiques géométriques initiales (I_y , C_w , J). L'utilisation d'une épaisseur d'âme équivalente pour simuler les raidisseurs doit donc uniquement influencer la distorsion.

Il est alors nécessaire de modifier légèrement l'approche énergétique développée au chapitre 6. Nous utiliserons toujours une épaisseur d'âme équivalente mais cette épaisseur ne sera utilisée que pour l'énergie de déformation due à la flexion de distorsion de l'âme de la poutre. Cette flexion latérale est reliée au premier terme de l'équation 6.29 :

$$\frac{Ew_{eq}^3}{12(1-\nu^2)} \int_{z=0}^{z=L} \int_{y=0}^{y=h} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 dy dz \quad (7.2)$$

Il faudra également utiliser l'épaisseur équivalente dans l'équation 6.101 qui sert à déterminer l'effet du ressort sur la déformée latérale de l'âme.

$$R = K_r \left(\frac{12}{Ew_{eq}^3} \right) \quad (7.3)$$

L'équation d'énergie pour une poutre à âme flexible avec un point de rotation fixe et un ressort rotationnel devient :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{z=0}^{z=L} \left\{ \begin{aligned} & GJ_1 \beta_1'^2 + GJ_2 \beta_2'^2 + EI_{y1} u_1''^2 + EI_{y2} u_2''^2 \\ & + \int_{y=0}^{y=h} \frac{Ew_{eq}^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right)^2 dy + \int_{y=0}^{y=h} \frac{Ew^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dy \\ & + \int_{y=0}^{y=h} \frac{Ew^3 \nu}{6(1-\nu^2)} \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \frac{d^2 u}{dz^2} \right) dy + \int_{y=0}^{y=h} \frac{Gw^3}{3} \left(\frac{d^2 u}{dy dz} \right)^2 dy \\ & - \frac{Md_1 t_1}{I_x} \left(u_1'^2 b_1 + \beta_1'^2 \frac{b_1^3}{12} \right) + \frac{Md_2 t_2}{I_x} \left(u_2'^2 b_2 + \beta_2'^2 \frac{b_2^3}{12} \right) \\ & - \frac{wM}{I_x} \int_{y=0}^{y=h} (y - d_2) \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dy + K \beta_{y=a}^2 \end{aligned} \right\} dz \quad (7.4)$$

Cette approche donne des résultats qui correspondent très bien aux résultats avancés par BASP comme on peut le constater aux deux figures suivantes.

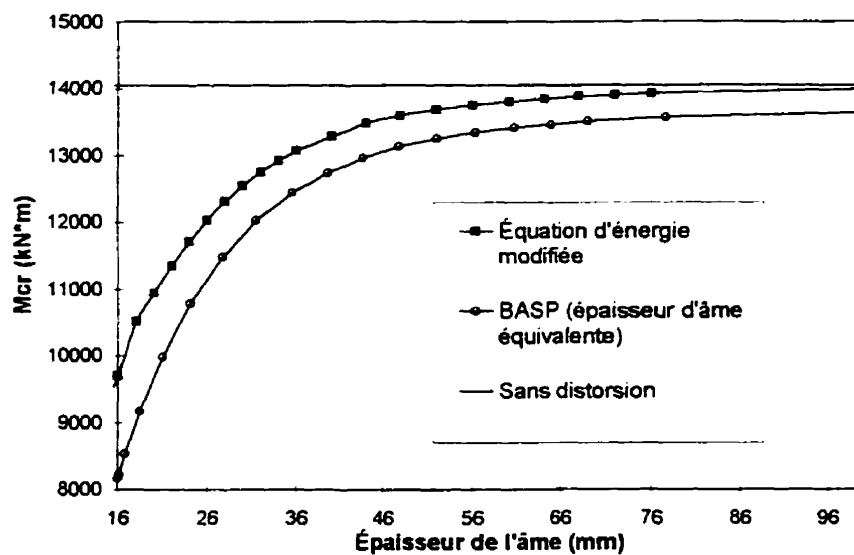


Figure 7.3 : Comparaison de l'effet de l'épaisseur d'âme équivalente sur la poutre type ($a=h/3$; $K_r = 50 \text{ kN}\cdot\text{mm/mm}$; raidisseurs : $t_r=8 \text{ mm}$, $s=1575 \text{ mm}$)

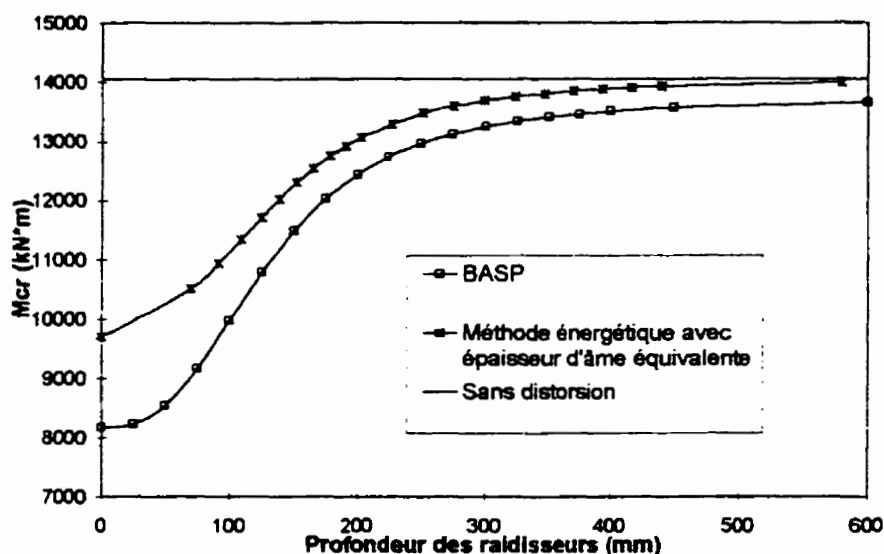


Figure 7.4 : Comparaison de l'effet de la profondeur des raidisseurs sur la poutre type ($a=h/3$; $K_r = 50 \text{ kN*mm/mm}$; raidisseurs : $t_r=8 \text{ mm}$, $s=1575 \text{ mm}$)

On constatera sur les figures 7.3 et 7.4 que la correspondance est très bonne si on fait exception du moment critique toujours plus faible donné par BASP. On voit également que le fait d'utiliser l'âme équivalente uniquement sur le terme de flexion latérale nous permet l'obtention du plafonnement discuté plus tôt. De plus, ce plafonnement correspond exactement, pour la méthode énergétique, à la valeur du moment critique obtenu en négligeant la distorsion.

L'écart entre les moments critiques obtenus des deux méthodes n'est pas dû à la transformation des raidisseurs car la même tendance est observée lorsqu'on augmente l'épaisseur de l'âme de la poutre, comme on peut le constater à la figure 7.5. On se

retrouve, comme discuté au chapitre précédent, avec une différence de l'ordre de 10% entre les deux méthodes.

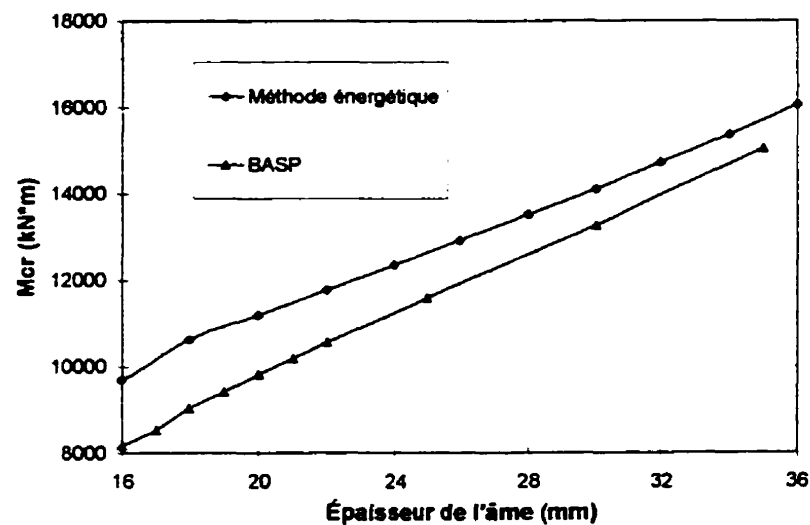


Figure 7.5 : Comparaison de l'effet de l'augmentation de l'épaisseur de l'âme sur la poutre type ($a=h/3$; $K_r = 50 \text{ kN*mm/mm}$)

Cet effet est également remarquable aux tableaux 7.3 et 7.4 où la poutre type et la poutre WWF1200x263 sont soumises à différentes positions de retenue latérale et de rigidités torsionnelles.

Tableau 7.3 : Moments de déversement (kN*m) pour la poutre type raidie
(raidisseurs de 100x8 mm espacés de 1575 mm)

a	K_r (kN*mm/mm)	BASP	Équation 7.1	Différence (%)
h/3	0	7990	8610	7,2
h/3	5	8220	8840	7,4
h/3	50	9980	11000	9,3
h/3	infini	21100	21500	2,0
h/6	0	5400	5770	6,4
h/6	infini	13300	14100	5,7
h/2	0	17100	18400	7,0
h/2	infini	29600	30700	3,6

Tableau 7.4 : Moments de déversement (kN*m) pour un profilé WWF1200x263
raidi (raidisseurs de 100x4 mm espacés de 750 mm)

Axe de rotation	K_r (kN*mm/mm)	BASP	Équation 7.1	Différence (%)
h/3	0	2300	2340	1,7
h/3	5	2460	2500	1,6
h/3	50	3790	3930	3,7
h/3	infini	9420	9510	0,9
h/6	0	1420	1440	1,4
h/6	infini	6650	6700	0,7
h/2	0	8860	9070	2,4
h/2	infini	15900	17200	7,5

7.2 Raidisseurs droits d'un seul côté de l'âme

Des raidisseurs d'un seul côté de l'âme sont parfois utilisés pour diverses raisons qui peuvent être d'ordre pratique ou même esthétique. La norme de l'AREA permet l'utilisation de ces raidisseurs et demande de calculer leur inertie selon un axe qui passe par l'âme. Cette approche correspond à l'utilisation d'une épaisseur équivalente basée sur l'inertie totale de la poutre. La norme de l'AREA permet toutefois une simplification puisqu'elle ne nous oblige pas à calculer le centre de gravité de la poutre qu'elle suppose être dans l'axe de l'âme.

Pour vérifier cette façon de faire, une série de modèles furent établis avec le logiciel ADINA pour la poutre du pont type. Dans un premier temps, des raidisseurs de chaque côté de l'âme (raidisseurs doubles) ont été ajoutés à la poutre à tous les 1400mm. Ces raidisseurs ont une profondeur de 316mm. De plus, la poutre est retenue latéralement à ses extrémités et au tiers de sa profondeur. Un ressort torsionnel de rigidité 50 kN*mm/mm y est également ajouté.

Une seconde série a été établie pour la même poutre avec les mêmes conditions à l'exception que les raidisseurs sont d'un seul côté de l'âme (raidisseurs simples) et ont ainsi une profondeur de 158 mm.

Le but de cet exercice est de faire varier l'épaisseur des raidisseurs pour ensuite pouvoir faire la comparaison entre les deux types de raidisseurs. Cette approche est plus

facile que de faire varier la profondeur des raidisseurs qui requièrent une remodelisation du modèle d'éléments finis beaucoup plus complète. De plus, comme nous venons de le démontrer plus haut, la relation est directe entre l'épaisseur des raidisseurs et le cube de leur profondeur.

Les résultats de cette variation d'épaisseur sont présentés au tableau 7.5 et à la figure 7.6.

Tableau 7.5 : Moment de déversement (kN*m) pour la poutre type avec raidisseurs simples et raidisseurs doubles

Épaisseur des raidisseurs	Raidisseur simple ($b_r=158$)	Raidisseur double ($b_r=316$)
0,4	1022	1014
0,6	2167	2213
0,8	3582	3615
1,0	5174	5249
1,2	6881	7003
1,4	8662	8834
1,6	10015	9717
4	10459	10840
8	10624	10945
12	10648	10974
16	10568	10932
20	10337	10737
30	9016	9290
40	7481	7554

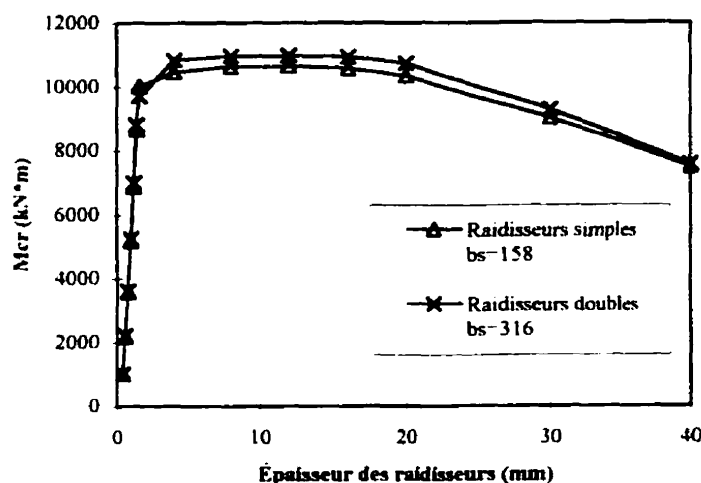


Figure 7.6 : Moment de déversement (kN*m) pour la poutre type avec raidisseurs simples et raidisseurs doubles

Comme on peut le constater, ces résultats ne tiennent pas sous le sens. Tout d'abord, on remarquera que, dans les deux cas, on observe une diminution du moment de déversement au-delà d'une certaine épaisseur des raidisseurs. Ceci est physiquement impossible. De plus, avant de plafonner, les résultats présentent un plateau que l'on pourrait croire être dû à du voilement local. Or, ce n'est pas le cas puisque les modes de déversement sont bel et bien des modes de déversement globaux sans aucun signe de voilement local du même type que celui présenté à la figure 5.3.

Finalement, ADINA nous prédit qu'un raidisseur simple de 1,6 mm d'épaisseur est plus efficace qu'un raidisseur dont la profondeur est le double et dont l'épaisseur est la même. Nous étions en droit de nous attendre à ce que, dans le meilleur des cas, un raidisseur simple ait la même influence qu'un raidisseur double 8 fois plus mince. Or, un

raidisseur simple d'une épaisseur de 8 mm donne un moment de déversement égal au double de la valeur à laquelle on pouvait s'attendre.

Malgré ces résultats très surprenants, nous ne croyons pas que les autres résultats obtenus du logiciel ADINA soient complètement à rejeter puisque nous nous sommes surtout servis de ce logiciel pour obtenir des modes de déversement et non pas des valeurs de moments de déversement. Jusqu'à présent, ces modes de déversement semblent toujours avoir été corrects et n'ont pas présentés d'invraisemblance ni de divergence avec les prévisions des méthodes trouvées dans la littérature.

Malheureusement, le logiciel ADINA était le seul outil à notre disposition qui permettait de traiter le cas des raidisseurs simples. Ce problème n'a donc pu être examiné à fond et pourrait faire l'objet d'études ultérieures.

Nous recommandons quand même d'utiliser une épaisseur d'âme équivalente qui correspond à l'inertie totale de la poutre avec ses raidisseurs calculé selon la position réelle du centre de gravité. Cette façon de faire va de paire avec la démarche effectuée jusqu'à présent et s'avère de plus être plus restrictive que les normes en vigueur.

7.3 Raidisseurs de forme triangulaire

Le but de cette section est de présenter une façon de transformer les goussets d'assemblage, que l'on peut voir comme étant des raidisseurs de forme triangulaire, en

des raidisseurs droits équivalents qui, à leur tour, seront transformés en une épaisseur d'âme équivalente.

Le rôle principal du raidisseur pour le déversement est de limiter la distorsion, ce qui revient à retenir latéralement la semelle supérieure de la poutre ou encore à relier la semelle supérieure à la semelle inférieure de manière à ce que celles-ci agissent à l'unisson. Notre définition de la largeur équivalente pour un raidisseur triangulaire sera donc basée sur cette approche.

L'épaisseur d'âme équivalente sera alors l'épaisseur qui donnera à la semelle supérieure un même déplacement latéral sous une charge unitaire que le déplacement qui aurait été obtenu pour la poutre avec ses raidisseurs, tel qu'illustré sur la figure suivante.

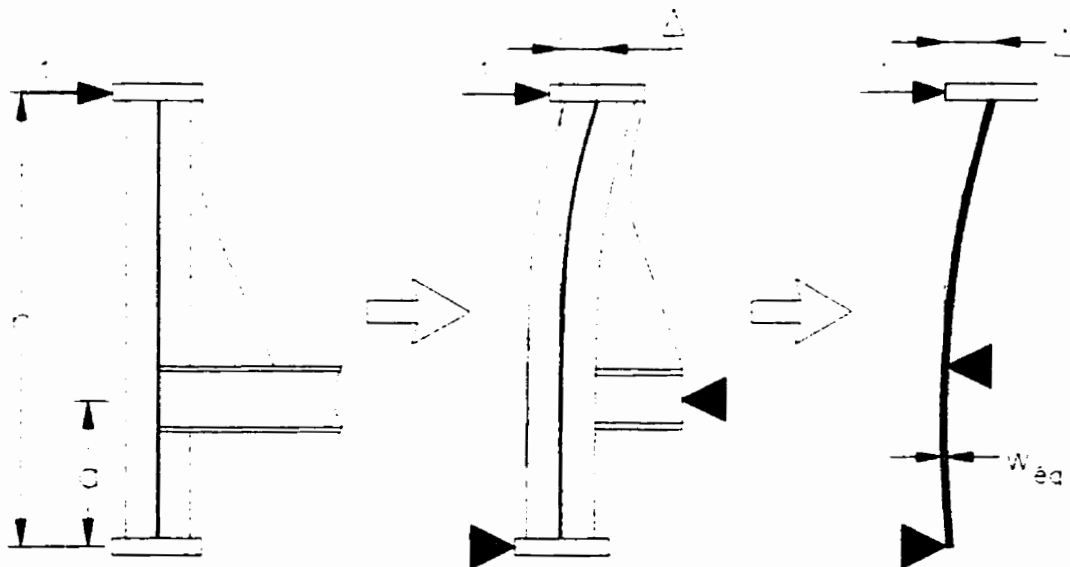


Figure 7.7 : Principe du calcul de l'épaisseur d'âme équivalente pour des raidisseurs triangulaires

La flèche Δ_{eq} pour la poutre avec âme équivalente est égale à :

$$\Delta_{eq} = \frac{1}{EI_{eq}} \left[\frac{(h-a)^2 a + (h-a)^3}{3} \right] \quad (7.5)$$

Par ailleurs, l'inertie de la poutre avec âme équivalente sera :

$$I_{eq} = \frac{w_{eq}^3 s}{12} \quad (7.6)$$

On trouvera ainsi l'épaisseur d'âme équivalente en égalant la flèche de la poutre avec raidisseur Δ et celle de la poutre à âme équivalente Δ_{eq} , ce qui nous donne l'équation suivante :

$$w_{eq} = \sqrt[3]{\left(4 \frac{(h-a)^2 a + (h-a)^3}{E \Delta s} \right)} \quad (7.7)$$

Pour le calcul de la flèche Δ au sommet du porte-à-faux que forme le raidisseur , l'utilisateur pourra s'en remettre aux équations traditionnelles de résistance des matériaux ou encore se servir d'un logiciel d'analyse de structures.

Pour valider notre approche, nous avons recouru encore une fois au logiciel BASP. BASP ne permettant pas l'insertion de raidisseur à inertie variable, nous avons validé notre approche à l'aide d'un raidisseur de forme géométrique simplifiée mais néanmoins à géométrie variable qui est représenté à la figure 7.8.

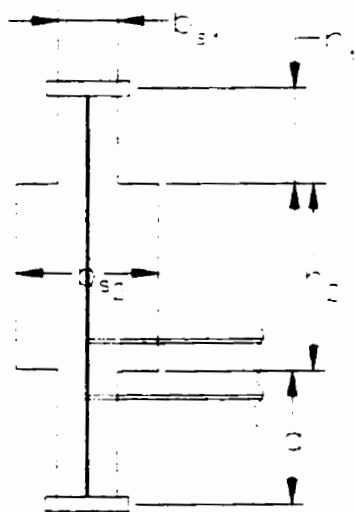


Figure 7.8 : Raidisseurs à inertie variable de géométrie simplifiée

Ce raidisseur de géométrie plus simple nous permet de simplifier le calcul de la flèche Δ qui devient alors :

$$\Delta = \frac{a(h_1 + h_2)^2}{3EI_0} + \frac{h_1^2 h_2}{EI_1} + \frac{h_1 h_2^2}{EI_1} + \frac{h_2^3}{3EI_1} + \frac{h_1^3}{3EI_2}$$

$$I_0 = I_2 = \frac{b_{s1}^3 t_{s1}}{12}$$

$$I_1 = \frac{b_{s2}^3 t_{s2}}{12}$$
(7.8)

Le déversement d'une série de poutres ayant des raidisseurs de la forme montrée à la figure 7.8 a été calculé avec BASP. Outre la forme de leurs raidisseurs, ces poutres sont basées sur la poutre type des figures 7.1 et 7.2, à savoir : semelles de 450 mm par 55 mm, âme de 2645 mm par 16 mm, raidisseurs d'épaisseur t , de 8 mm espacés de 1575 mm et sur une poutre WWF1200x263 également utilisée plus tôt et dont les

caractéristiques sont : semelles de 300 mm par 25 mm, âme de 1175 mm par 16 mm, raidisseurs d'épaisseur $t_r=8$ mm espacés de 750 mm. Pour ces deux poutres, différentes configurations de raidisseurs, de position de l'axe de rotation forcé et de rigidité du ressort rotationnel ont été appliqués. Les résultats obtenus de BASP se retrouvent au tableau 7.6. L'épaisseur d'âme équivalente (w_{eq}) a été également calculée par l'équation 7.7 et cette épaisseur a été utilisée pour trouver le moment de déversement de la poutre avec la méthode énergétique décrite à la section 7.1. La dernière colonne nous donne l'écart observé entre les résultats de BASP et ceux obtenus de la méthode énergétique. Le lecteur remarquera que l'équation 7.8 doit être modifiée pour les configurations B, D et F puisqu'alors $I_0=I_1$ au lieu de $I_0=I_2$.

Tableau 7.6 : Comparaison des moments de déversement obtenus par BASP et par la méthode énergétique via l'équation 7.7

Poutre	b ₁	b ₂	configuration (figure 7.9)	K _r (kN*mm/mm)	w _{eq} (selon éq. 7.13)	M _r par BASP (kN*m)	M _r par méthode énergétique (kN*m)	Écart (%)
Poutre type	100	200	A	50	25,8	10540	11920	+13
	100	300	A	50	27,3	10790	12150	+13
	200	300	A	50	42,0	11090	13370	+21
	200	400	A	50	44,9	11170	13480	+21
	100	200	C	50	24,6	20493	26024(*)	+27
	200	400	E	50	51,6	5800	7820	+35
	200	400	A	5	44,9	9980	10460	+5
	200	400	A	500	44,9	29770(*)	29410(*)	-1
	100	200	B	50	32,3	12070	12740	+6
	100	300	B	50	40,0	12750	13280	+4
	200	300	B	50	49,3	13170	13610	+3
	200	400	B	50	59,9	13400	13800	+3
	100	200	D	50	34,7	33690(*)	35170(*)	+4
	200	400	F	50	62,6	5840	7850	+34
	200	400	B	5	59,9	10260	10630	+4
	200	400	B	500	59,9	32070(*)	32460(*)	+1
WWF 1200 x263	50	100	A	50	20,5	3840	3900	+2
	50	150	A	50	22,2	3980	3970	0
	100	150	A	50	28,6	4030	4130	+2
	50	100	B	50	23,5	3910	4020	+3
	50	150	B	50	29,7	4100	4150	+1
	100	150	B	50	32,7	4150	4190	+1

(*) Poutres déversant selon le deuxième mode (m=2).

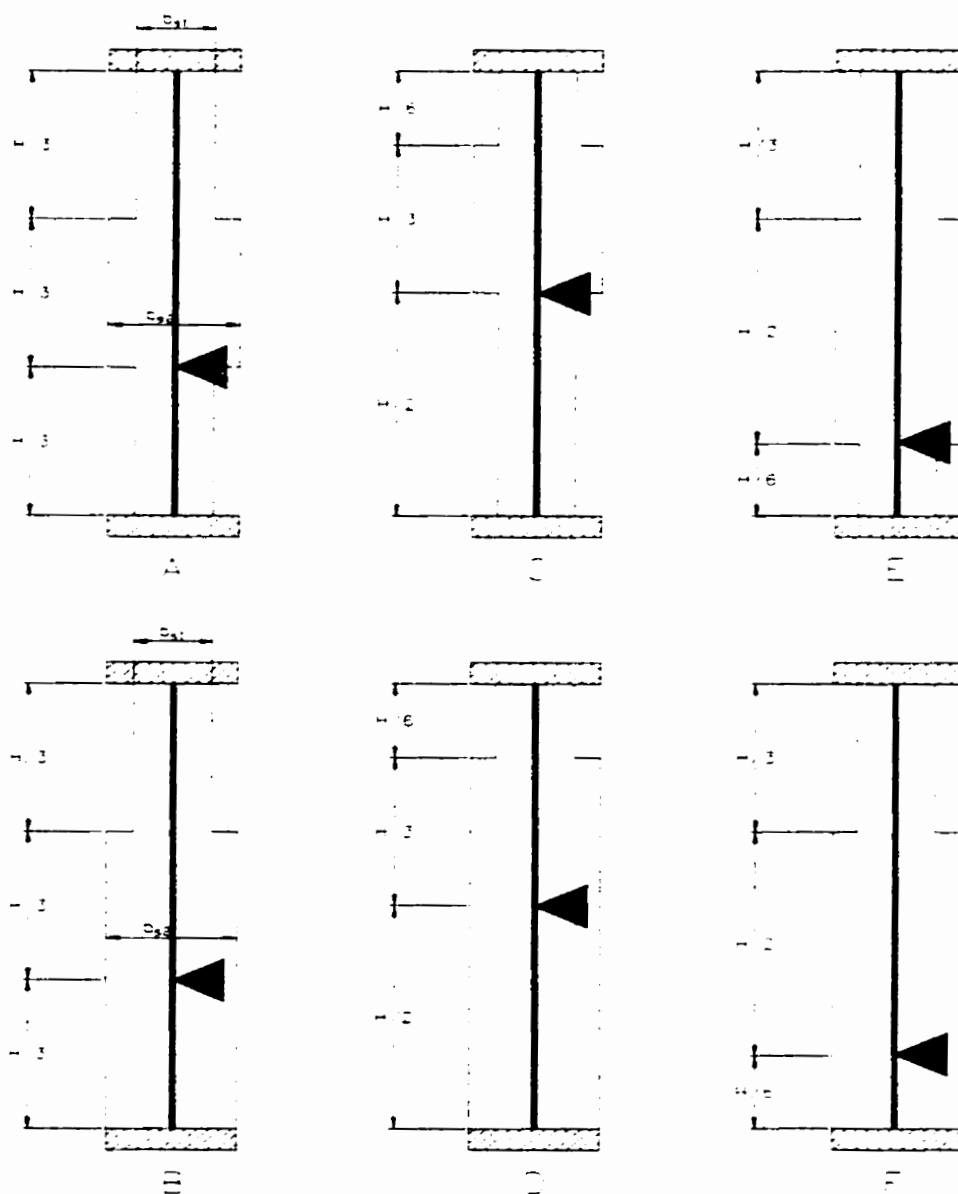


Figure 7.9 : Configurations des raidisseurs utilisés au tableau 7.6

On remarquera que la méthode énergétique prédit des moments de déversement supérieurs à ceux obtenus du logiciel BASP et que l'écart est d'autant plus grand que l'axe de rotation forcé est situé bas sur la poutre. L'écart est toutefois plus faible pour la poutre WWF1200x263 et pour la poutre type lorsque la distorsion de la partie inférieure

au tablier est plus fortement raidie. L'écart entre les deux méthodes semble donc d'autant plus grand que l'on a affaire à une poutre élancée.

Dans cette étude comparative, il faut par contre se rappeler que les résultats obtenus de BASP (et des logiciels d'éléments finis en général) sous-estiment le moment de déversement par rapport à la valeur obtenue de l'approche énergétique (voir section 7.1). Les résultats de BASP devraient ainsi être environ 10% plus élevé, ce qui vient réduire fortement les écarts observés. Étant donné les simplifications nécessaires pour transformer ces raidisseurs à inertie variables en âme équivalente, nous considérons donc cette approche comme étant acceptable.

Un autre aspect à ne pas négliger et dont nous n'avons pas beaucoup discuté jusqu'à présent est qu'un raidisseur triangulaire aura une efficacité plus grande qu'un raidisseur droit car il vient réduire la portée des entretoises (S' au lieu de S), tel qu'illustré à la figure 7.10. Ainsi, en réduisant la portée des entretoises, il augmente leur rigidité, ce qui se traduit en fait par une augmentation de la rigidité du ressort torsionnel. Cette augmentation peut être appréciable et devrait être prise en compte.

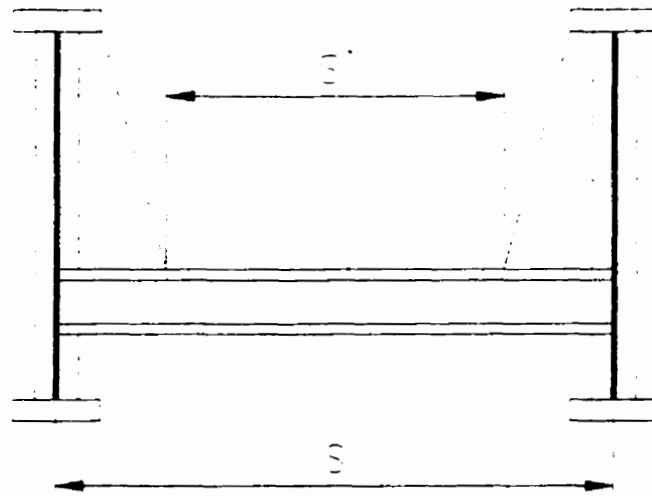


Figure 7.10 : Réduction de la portée des entretoises

7.4 Comparaison avec la méthode de Bleich et la méthode de Yura

Nous allons ici faire la comparaison entre la méthode proposée, celle de Bleich et la méthode de Yura. Comme les deux dernières ne disent pas comment traiter les raidisseurs triangulaires, nous ne les comparerons pas sur ce point.

Nous étudierons encore la poutre du pont type et la poutre WWF1200x263 d'une portée de 12 mètres comme point de comparaison. La configuration de base sera une retenue latérale aux extrémités et au tiers de la profondeur avec un ressort de 50 kN*mm/mm. La poutre du pont type est munie de raidisseurs de dimensions 100x8

espacés de 1575 mm alors que la poutre WWF1200x263 est munie de raidisseurs de dimensions 100x4 espacés de 750mm

Les résultats obtenus pour différentes configurations sont présentés au tableau 7.7. Les résultats marqués d'un astérisque dans la colonne de la méthode de Bleich sont augmentés pour correspondre au flambement du poteau sur la longueur totale de la poutre calculé selon la formule d'Euler.

Tableau 7.7 : Comparaison des moments de déversement (kN*m) de la méthode proposée avec celle de Bleich et de Yura

Poutre	Axe de rotation	K_r (kN*mm/mm)	Méthode proposée	Méthode de Bleich	Méthode de Yura
Pont type	h/3	0	7990	3440*	4750
	h/3	5	8220	3440*	4830
	h/3	50	9980	6130	5460
	h/3	infini	21100	10410	8910
	h/6	0	5400	3440*	4750
	h/6	infini	13300	7410	8910
	h/2	0	17100	3440*	4750
	h/2	infini	29600	16020	8910
WWF 1200 x263	h/3	0	2300	910*	1180
	h/3	5	2460	910*	1230
	h/3	50	3790	1450	1560
	h/3	infini	9420	5880	4270
	h/6	0	1420	910*	1180
	h/6	infini	6650	4200	4270
	h/2	0	8860	910*	1180
	h/2	infini	15900	9030	4270

Pour le calcul par la méthode de Bleich, un sixième de l'âme est inclus dans la semelle comprimée tel que recommandé par Johnston (1976).

Tel que prévu, les méthodes de Yura et de Bleich donnent des résultats plus faibles que la méthode proposée. Pour la méthode de Yura, ceci s'explique par le fait que cette méthode néglige complètement l'effet bénéfique du tablier qui ajoute un support latéral à la poutre. D'ailleurs, les différences entre la méthode proposée et celle de Yura s'amenuisent à mesure que l'axe de rotation imposé descend et perd donc de son effet.

Quand à la méthode de Bleich, elle néglige l'effet bénéfique de la semelle inférieure qui, étant tendue, apporte une rigidité supplémentaire à l'ensemble de la poutre. Ceci se confirme également par le fait que les différences entre la méthode proposée et la méthode de Bleich s'amenuisent avec une augmentation de la rigidité du ressort torsionnel. Cette augmentation vient en effet diminuer l'apport que peut avoir la partie de la poutre en tension.

CHAPITRE 8

CONCLUSION

Le problème de la stabilité au déversement des poutres des ponts ferroviaires à tablier inférieur n'est pas un problème nouveau. Pour l'ingénieur concepteur ou évaluateur de telles structures, il demeure toutefois un problème complexe et qui, étonnamment n'est pas abordé d'un point de vue structural dans les normes mais seulement sur la base de contraintes de dégagement qui sont imposées au pont. L'ingénieur doit donc se trouver des outils fiables et pratiques pour résoudre ce genre de problèmes. C'est là à la fois la beauté et la problématique du métier.

Dans ce mémoire, nous avons tenté de développer une méthode de calcul qui permette de résoudre le problème de l'évaluation de la résistance au déversement des poutres de pont à tablier inférieur. Nous présentons ici la synthèse de ces résultats.

On ne peut refaire la monde avec un simple mémoire; c'est pourquoi cette synthèse sera suivie des travaux subséquents qui restent à effectuer et des nouvelles voies de recherche à explorer.

8.1 Synthèse

8.1.1 Analyse classique du déversement

Depuis Engesser en 1889 qui fut le premier à traiter du problème, de multiples auteurs ont appliqué différentes méthodes pour déterminer le moment de déversement d'une poutre dont la retenue ne se fait pas au niveau de la semelle comprimée.

Deux écoles de pensée en sont ressorties, ceux qui ne considèrent que la partie comprimée de la poutre et ceux qui considèrent la poutre en entier. Les premiers, parmi lesquels on peut citer Engesser, Timoshenko, Bleich et Schweda, se servent d'un modèle de poteau retenu latéralement par des supports élastiques. Les seconds, dont font partie Taylor, Ojalvo, et Yura, préfèrent utiliser la poutre en son entier et ajouter à celle-ci un ressort travaillant en rotation pour simuler la retenue latérale.

Un phénomène qui n'est pas à négliger dans l'étude du problème des poutres de ponts à tablier inférieur est la distorsion. Celle-ci est due principalement à la flexion de l'âme de la poutre dans son plan. Ce phénomène est négligeable dans l'étude des poutres conventionnelles. La théorie classique utilisée par les ingénieurs pour la conception de ces dernières n'en tient d'ailleurs pas compte, ce qui permet une grande simplification de l'analyse du déversement de la poutre. Ceci explique pourquoi les équations contenues dans les normes de conception, développées pour traiter des cas usuels, ne permettent pas une analyse correcte des poutres de ponts à tablier inférieur.

L'autre phénomène important est le rôle que joue le tablier du pont qui agit comme un diaphragme horizontal qui vient empêcher le déplacement latéral de la poutre au niveau du tablier.

Les auteurs utilisant un modèle de poteau sur appuis élastiques tiennent compte de la distorsion. Toutefois, ce modèle ne voit pas la poutre dans son ensemble et ne peut inclure l'effet stabilisateur que peut avoir la semelle inférieure, par exemple. De plus, une conversion doit être faite pour ramener la charge de compression maximale obtenue à un moment fléchissant plus propice à la conception de poutres.

L'utilisation du modèle de poutre avec ressort rotationnel peut inclure la distorsion mais en partie seulement. Ces méthodes, bien qu'elles considèrent la poutre dans son ensemble, n'incluent pas non plus l'effet du tablier, effet qui peut être très considérable.

8.1.2 Comportement et composantes stabilisatrices

Le pont, vu dans son ensemble, comporte plusieurs composantes qui viennent, de façon directe ou non, contribuer à la résistance des poutres au déversement. Ces composantes sont: les entretoises, le tablier, l'assemblage reliant les entretoises aux poutres maîtresses, les goussets d'assemblage et les raidisseurs. Ces derniers pourront être des raidisseurs transversaux, longitudinaux ou porteurs.

Chacune de ces composantes joue un rôle particulier. Les entretoises viennent empêcher la rotation de la poutre en fournissant à celle-ci l'équivalent d'un ressort travaillant en rotation. Cette rigidité est transférée à la poutre maîtresse par un assemblage qui possède sa propre rigidité. Les deux systèmes agissant en série, la rigidité totale ne pourra être plus grande que la plus petite des rigidités.

Le tablier, de par sa rigidité de diaphragme horizontal, vient empêcher le déplacement latéral des poutres maîtresses à son niveau. Ce faisant, il vient imposer, lors du déversement de la poutre, l'axe de rotation autour duquel la poutre déversera.

Les goussets d'assemblage viennent court-circuiter les assemblages entretoises-poutres maîtresses. Ils augmentent de plus la rigidité fournie par les entretoises en raccourcissant la portée de ces dernières. Finalement, ils jouent le même rôle que les raidisseurs transversaux.

Les raidisseurs transversaux viennent rigidifier l'âme de la poutre et viennent ainsi diminuer l'effet de la distorsion. Les raidisseurs longitudinaux n'ont pas d'influence sur le déversement global mais vont limiter le voilement local de l'âme de la poutre. Quant aux raidisseurs porteurs, ils viennent assurer la retenue latérale des extrémités de la poutre en apportant une rigidité supplémentaire à ces dernières.

8.1.3 Modélisation du pont type utilisé et étude paramétrique

De manière à confirmer l'influence des composantes stabilisatrices et de voir l'influence qu'elles ont entre elles, un modèle par éléments finis a été développé. Ce modèle représente un pont réel typique avec toutes ses composantes.

Le voilement local a empêché l'utilisation de ce modèle pour les cas d'intérêt en venant imposer une limite d'utilisation sur l'obtention d'un mode de déversement (figure 8.1). Ce modèle nous a quand même permis de confirmer l'effet des différentes composantes qui ont été décrites précédemment. De plus, la visualisation des modes de déversement a été un outil précieux pour bien saisir le rôle de chacune des composantes.

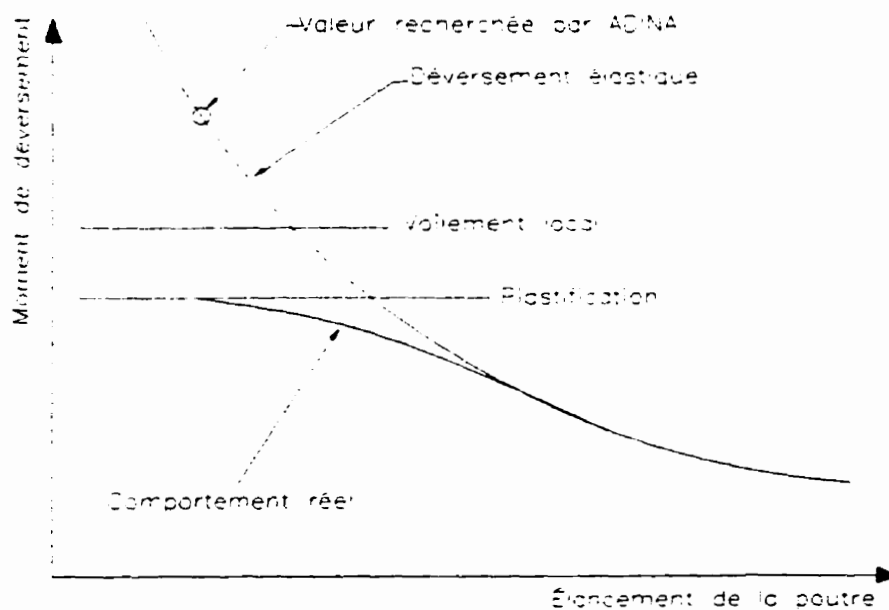


Figure 8.1 : Limite d'utilisation d'ADINA

8.1.4 Déversement d'une poutre avec âme flexible et point de rotation fixe

En se basant sur une approche énergétique, un modèle mathématique du déversement d'une poutre a été conçu. Ce modèle, au lieu de considérer la poutre comme un seul objet, décompose cette dernière en trois parties qui sont l'âme de la poutre et ses deux semelles.

Pour obtenir le moment de déversement par cette approche, la déformée de la poutre doit être supposée. Nous utilisons des polynômes de degré allant jusqu'à quatre, selon les cas étudiés, pour représenter la déformée latérale de l'âme au moment du déversement. Ces polynômes sont couplés à des déformées longitudinales de forme sinusoïdale. Cette approche permet d'inclure le phénomène de la distorsion sur l'âme tout en préservant une analyse qui considère la poutre dans son ensemble. On peut également, en utilisant un polynôme de degré 1, négliger l'effet de la distorsion

Cette méthode est appliquée tout d'abord à des poutres sans l'effet du tablier. Les résultats obtenus sont validés par différentes analyses basées sur les éléments finis. Bien que les éléments finis donnent des moments de déversement constamment légèrement inférieurs à ceux obtenus de la méthode énergétique, les tendances sont les mêmes dans les deux cas.

La méthode est ensuite appliquée à des poutres dont l'axe de rotation est imposée (effet du tablier) et qui sont munies d'un ressort rotationnel qui remplace l'effet des

entretoises et de leurs assemblages. Les résultats sont également validés par des analyses basées sur les éléments finis.

8.1.5 Déversement d'une poutre raidie

La méthode énergétique développée précédemment ne permettant pas l'introduction de raidisseurs dans le problème, ceux-ci sont remplacés par une augmentation de l'épaisseur de l'âme de la poutre. Cette augmentation vient réduire l'effet de la distorsion et remplace correctement le rôle des raidisseurs.

Un processus permettant de passer des raidisseurs à l'épaisseur d'âme équivalente est alors développée. Ce processus permet ainsi l'utilisation de la méthode énergétique.

L'utilisation de la méthode développée et du processus de transfert des raidisseurs nous permet d'inclure la distorsion de même que l'effet du tablier tout en considérant la poutre dans son ensemble.

8.2 Utilisation de la méthode proposée

Cette section résume les étapes à effectuer et les équations à utiliser pour déterminer le moment résistant de la poutre d'un pont à tablier inférieur en se servant de la méthode énergétique proposée.

8.2.1 Transformations des raidisseurs transversaux

La première étape est de transformer les raidisseurs de la poutre maîtresse en une épaisseur d'âme équivalente.

8.2.1.1 Raidisseurs droits

Si la poutre est munie de raidisseurs transversaux droits, calculer l'épaisseur d'âme équivalente par l'équation 7.1. Si les raidisseurs sont d'un seul côté de l'âme, l'équation 7.1 doit être modifiée pour tenir compte de la position du centre de gravité de la poutre et ainsi calculer l'inertie latérale de la poutre à partir de ce centre de gravité (voir section 7.2)

8.2.1.2 Raidisseurs triangulaires (goussets d'assemblage)

Pour une poutre munie de goussets d'assemblage, calculer la flèche Δ pour la poutre munie des ses goussets d'assemblages selon la figure 7.7 puis trouver l'épaisseur d'âme équivalente par l'équation 7.7.

8.2.2 Détermination de la rigidité K_r

La deuxième étape est d'évaluer la rigidité du ressort rotationnel qui vient retenir la rotation de la poutre. Cette rigidité se calcule à partir de la rigidité des entretoises (β_{ent}) et de celle des assemblages poutres maîtresses-entretoises (β_{ass}) qui sont ensuite combinées par l'équation 3.2, sachant que $\beta_T = K_r$.

8.2.2.1 Rigidité des entretoises

La rigidité des entretoises (β_{ent}) est évaluée selon la figure 2.13. Pour une poutre munie de goussets d'assemblage, calculer la longueur des entretoises S' selon la figure 7.10 et utiliser cette valeur dans l'équation de la figure 2.13.

8.2.2.2 Rigidité des assemblages poutres maîtresses-entretoises

La rigidité des assemblages (β_{as}) peut être évaluée par le modèle de Chen et Lui (1991) montré à la section 4.3.1 si l'assemblage est du même type que celui montré. Advenant le cas, calculer R_i par l'équation 4.1 et se servir de cette valeur comme valeur de β_{as} . Pour un assemblage de type différent, utiliser la méthode de la section 4.3.2 ou tout autre méthode valable.

8.2.3 Calcul du moment de déversement élastique (M_{cr})

La prochaine étape est de trouver le moment de déversement élastique en utilisant la procédure décrite à la section 6.3.5 et en appliquant cette procédure sur l'équation 7.4. (Les valeurs de m_{11} à m_{44} ne seront pas celles des équations 6.61 à 6.76 mais bien des termes beaucoup plus complexes). Pour résoudre l'équation 7.4, l'utilisateur pourra se servir du programme Mathematica de l'annexe E, qui contient l'équation 7.4 de même que toute la procédure de la section 6.3.5. L'utilisateur n'a alors qu'à modifier les propriétés géométriques en début de fichier.

8.2.4 Calcul du moment résistant

La dernière étape est de déterminer le moment résistant de la poutre en se basant sur la courbe de calcul appropriée, courbe qui inclura les effets de la plasticité et des défauts de rectitude (voir figure 1.9). Un exemple de courbe de calcul est donné par les équations 1.12, 1.13 et 1.14.

8.3 Travaux subséquents

Parmi les domaines qui restent à examiner pour compléter la solution et confirmer certaines hypothèses utilisées dans ce mémoire, nous pouvons mentionner:

- la transformation en épaisseur d'âme équivalente des raidisseurs transversaux d'un seul côté de l'âme;
- l'étude de l'interaction entre le déversement et le voilement local et entre le déversement et la plastification;
- le calcul des forces engendrées dans les membrures lors du déversement;
- l'étude du déversement sous des charges mobiles et dynamiques;
- l'application de la méthode d'analyse proposée à des ponts de géométrie différentes (poutres à inertie variable, ponts courbes ou en biais).

De plus, des études expérimentales seraient également requises pour confirmer ces analyses. Toutefois, ces études sont généralement très difficiles à mener car dans la conception des structures, on cherche à éviter à tout prix une rupture en flambement ou

en déversement. L'obtention du déversement nécessite donc l'utilisation de géométries ou de matériaux non-usuels, d'où la difficulté de relier les résultats aux structures conventionnelles.

BIBLIOGRAPHIE

ADINA R&D, 1990, ADINA-IN for ADINA users manual, Watertown, MA.

AMERICAN RAILWAY ENGINEERING ASSOCIATION (AREA), 1988, Manual for Railway Engineering, Chap. 15 : Steel Structures, AREA, Washington.

ANDERSEN, P., NORDBY, G.M., 1960, Introduction to Structural Mechanics, The Ronald Press Company, New York.

BATOZ, J.L., DHATT, G., 1990, Modélisation des structures par éléments finis, Les presses de l'Université Laval, Sainte-Foy.

BLEICH, F., 1952, Buckling Strength of Metal Structures, First Edition, McGraw-Hill, New-York, 508 pages.

BOWMAN, H.L., SUTHERLAND, H., 1950, Structural Theory, Fourth Edition, John Wiley and Sons, New York.

BROCKENBROUGH, R.L., MERRITT, F.S., 1994, Structural Steel Designer's Handbook, Second Edition, McGraw-Hill, New-York.

CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION (CSA), 1966, Steel Railway Bridges, CSA standard S1-1966, CSA, Ottawa.

CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION (CSA), 1978a, Standards Catalogue 1978, CSA, Rexdale (Ontario).

CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION (CSA), 1978b, Concrete Railway Bridges, CSA standard S29-1978, CSA, Rexdale (Ontario).

CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION (CSA), 1994, Limit states design of steel structures, CAN/CSA standard S16.1-94, CSA, Rexdale (Ontario).

CHEN, W.F., LUI, E.M., 1987, Structural Stability : Theory and Implementation, chap. 5, Elsevier Science Publishing Co., New York.

CHEN, W.F., LUI, E.M., 1991, Stability Design of Steel Frames, Chap. 5 : Behavior and modeling of semi-rigid connections, CRC Press, Boston.

CHOO, K.M., 1987, Buckling program BASP for use on a microcomputer, thèse présentée à l'Université du Texas à Austin.

DUFFIELD, C.F., HUTCHINSON, G.L., STEVENS, L.K., 1986, Elastic torsional buckling of through plate girder rail bridges, Proceedings of the Pacific Structural Steel Conference, New Zealand Heavy Engineering Research Association, Manukau City (Nouvelle-Zélande).

HOPE, B.B., LEE, J.A.N., 1964, Tests on a laboratory bridge III - Lateral stability of the trusses, Report. No. 23, Queen's University, Kingston, Ontario.

JOHNSTON, B.G., 1976, Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, Structural Stability Research Council, Third Edition, Chap. 14 (Members with Elastic Lateral Restraints), John Wiley & Sons, New York

LAZARD, A., 1946, Flambement en milieu élastique discontinu, efficacité d'un dispositif de contre-flambage, Annales des ponts et chaussées, vol. 116, p.289.

LAZARD, A., 1949, Compte rendu d'essais sur le flambage d'une tige posée sur supports élastiques équidistants, Annales de l'institut technique du bâtiment et des travaux publics, numéro 88.

NETHERCOT, D.A., 1983, Beams and beams-columns: stability and strength, Applied Science Publishers, New York.

NYLANDER, H., 1956, Torsion, bending and lateral buckling of I-beams, Scandinavian Council for Applied Research, Acta Polytechnica, Ci 199, Civil Engineering and Building Construction Series, v.3 no.5.

PICARD, A., BEAULIEU, D., 1991, Calcul de charpentes d'acier, Première édition, Institut Canadien de la Construction en Acier, Willowdale (Ontario), 862 pages.

RATZERSDORFER, J., 1945, A buckling problem, the case of an elastically supported beam, Aircraft Engineering, December, pp.348-353.

TAYLOR, A., OJALVO, M., 1966, Torsional restraint of lateral buckling, Journal of the structural division, ASCE, ST2, April, pp 115-129.

TIMOSHENKO, S., 1913, Sur la stabilité des systèmes élastiques, Annales des ponts et chaussées.

TIMOSHENKO, S., 1947, Théorie de la stabilité élastique, Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris, 496 pages.

WATERLOO MAPLE SOFTWARE, Maple V for Windows, 1994

WOLFRAM, S., 1991, Mathematica : a system for doing mathematics by computer, 2nd edition, Addison-Wesley Publishing Company inc, Redwood City (California).

YURA, J.A., 1993, Fundamentals of beam bracing, Structural Stability Research Council Conference - Is your structure suitably braced?, April 6-7, Milwaukee, Wisconsin, p.1.

ANNEXE A

CHARGEMENT COOPER

Le chargement de type Cooper porte le nom de son créateur, Théodore Cooper, qui, en 1894, publia un chargement représentant les trains de l'époque (Bowman et Sutherland, 1950).

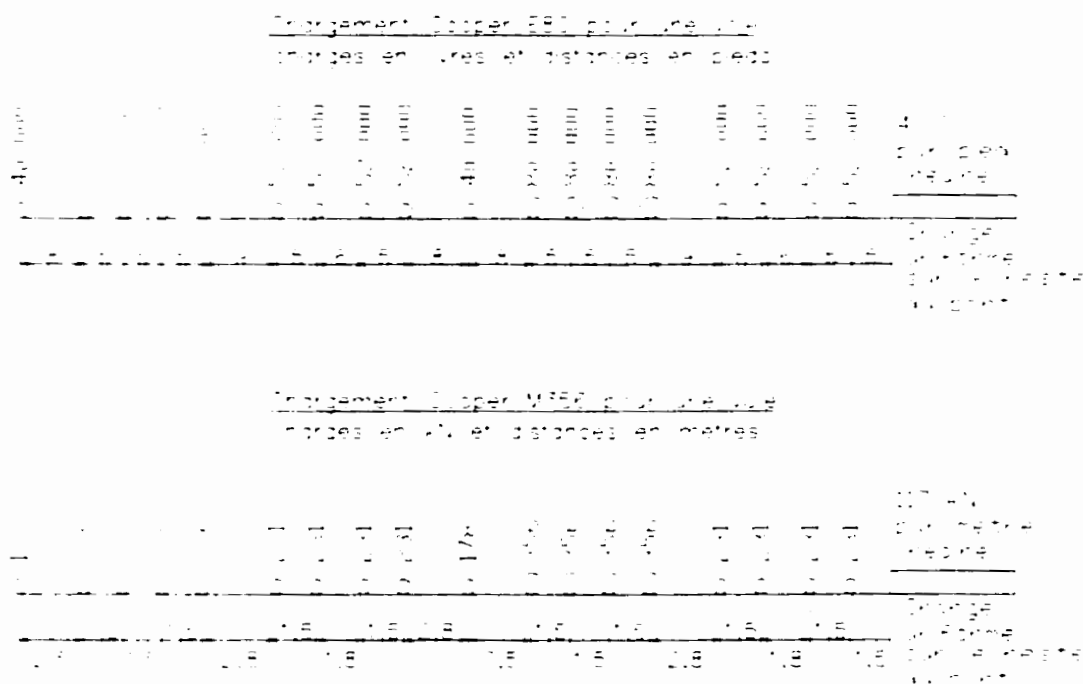


Figure A.1 : Chargement Cooper

Ce chargement est constitué de deux locomotives et de leurs tenders, le tout suivi d'un train représenté par une charge uniforme. Le chargement originel de Cooper était

basé sur la locomotive la plus lourde de l'époque, la locomotive de type Consolidation. Cette locomotive est caractérisé par un agencement de roues de type 2-8-0, ce qui veut dire qu'il y a un essieu de deux roues directrices suivi de quatre essieux de roues motrices et qu'il n'y a pas d'essieux porteurs ensuite (voir figure A.2 et A.3).

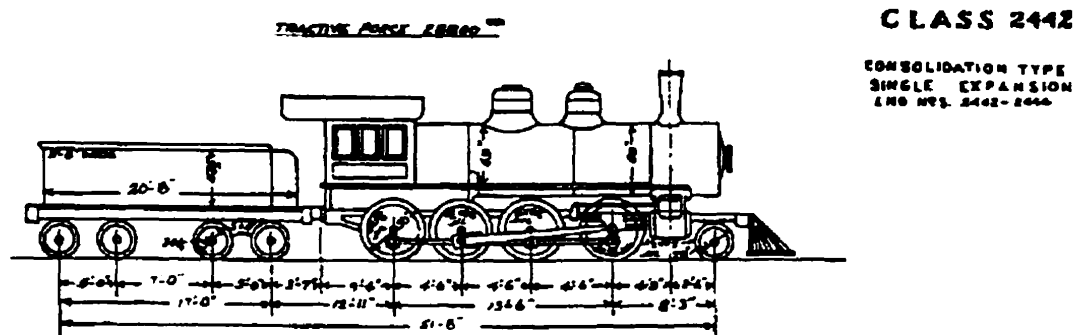


Figure A.2 : Locomotive de type Consolidation 2442 avec tender



Figure A.3 : Un exemple d'une locomotive de type Consolidation avec son tender

Le chargement que créa Cooper fut appelé Cooper E40. Le E signifie « engine » (locomotive en anglais) et le chiffre qui le suit donne le poids en milliers de livres de l'essieu le plus chargé. Une charge alternative constituée de deux essieux espacés de 2,2 mètres (7 pieds) et fortement chargés (125% de l'essieu le plus chargé) est aussi prescrite. Cette charge alternative sera significative seulement pour les portées de moins de 3,7 mètres (CSA, 1966). Cette charge alternative a été d'ailleurs supprimée dans l'édition 1988 de la norme de l'AREA.

Dans les années qui suivirent, les locomotives devinrent de plus en plus lourdes et ce, jusqu'à l'apparition des locomotives diesel qui remplaceront progressivement les locomotives à vapeur à partir des années 30 (figure A.4). Pour tenir compte de cette augmentation de poids, on conserva le même espacement des essieux et la même répartition de la charge entre les essieux mais les charges de chaque essieu ont été multipliées par un facteur constant pour alors donner les chargements Cooper E45, Cooper E50, Cooper E55 et ainsi de suite.

Malgré le fait que l'utilisation de roues de plus en plus grosses sur les locomotives à vapeur venaient modifier l'espacement des essieux, ces espacements furent conservés entre autres pour tenir compte des autres charges susceptibles d'être observés dans le futur et pour fournir une base commune pour l'évaluation des structures (Bowman et Sutherland, 1950). En effet, dans le domaine ferroviaire, contrairement au domaine routier, on peut connaître de façon très précise les dimensions et les charges du matériel

roulant. Un chargement standardisé permet d'anticiper en partie les évolutions du matériel roulant en prenant une charge plus grande que la charge maximale en circulation lors du design.

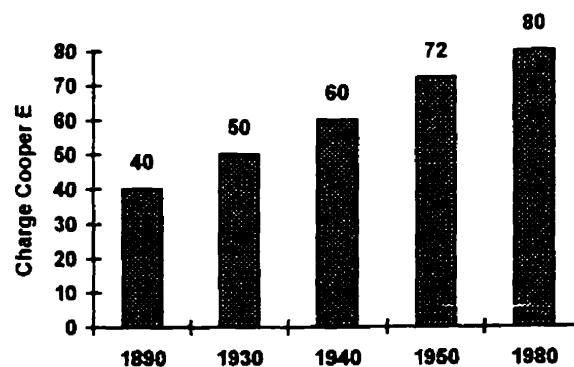


Figure A.4 : Évolution de la charge prescrite pour le calcul des structures

Une des conséquences d'avoir un espacement et une répartition entre les essieux invariable est que l'utilisation de tables de calcul est grandement simplifiée. En effet, pour avoir les efforts (moment fléchissant, effort tranchant, etc.) dans une structure pour une charge Cooper spécifique, on peut se servir de n'importe quelle table basée sur un chargement Cooper et multiplier les charges obtenues par le ratio entre les deux chargements. Par exemple, pour avoir les efforts causés par un chargement de type Cooper E72, il suffit de multiplier les efforts causés par un chargement de type Cooper E40 par le rapport $72/40$. Les tables de conception n'ont ainsi pas besoin d'être réécrites pour chaque augmentation du chargement.

À partir des années 40, l'apparition du diesel entraîna une modification de l'espacement entre les essieux et une diminution de la charge par essieu (Andersen et Nordby, 1960). Les gens du milieu ferroviaire continuèrent toutefois d'utiliser les chargements Cooper bien que la répartition des charges n'ait aucune commune mesure avec les chargements réels imposés aux structures. L'utilisation des charges Cooper étant bien maîtrisée, elle permit entre autres l'établissement d'un système commun d'évaluation des structures existantes.

Une comparaison du chargement Cooper avec les équipements en circulation a été faite par Andersen et Nordby (1960) et elle démontra la pertinence d'utiliser toujours les chargements Cooper. Le chargement de l'époque, le Cooper E72, reproduisait de façon sécuritaire les effets des trains habituellement rencontrés. Seuls les équipements très spécialisés (wagon de minerai de fer, par exemple) ne respectaient pas cette règle, équipements pour lesquels un calcul complet des charges est fait de toute façon.

ANNEXE B

ÉTUDES DE CONVERGENCE

Après avoir choisi d'utiliser des éléments de voiles minces, une série d'études de convergence a été nécessaire pour déterminer le niveau de raffinement (au niveau du modèle comme au niveau de l'élément même) requis pour une réponse acceptable. Puisque nous utilisons ADINA pour calculer des charges de flambement, les études de convergence ont porté sur cet aspect du logiciel. En effet, un bon comportement du modèle pour un cas linéaire de déformation sous une charge ne nous garantit pas forcément un bon comportement au niveau du flambement qui est, par définition, un problème non-linéaire.

B.1 Étude de convergence sur les éléments de voiles minces

ADINA offre trois types d'éléments de voiles minces: à 4 noeuds, à 8 noeuds et à 16 noeuds. Les deux étapes suivantes ont servies à choisir parmi ces trois configurations la plus adéquate pour notre problème. Les trois éléments sont donc mis à l'épreuve en calculant la charge de flambement d'une plaque simplement supportée sur ses quatre côtés soumise à un effort de compression puis à un effort de flexion. Les résultats sont comparés à des solutions connues et bien documentées dans la littérature.

B.1.1 Plaque en compression

La théorie classique de stabilité permet de prédire la charge critique qui fera voiler une plaque rectangulaire sur appuis simples lorsque celle-ci est soumise à un chargement dans son plan (figure B.1).

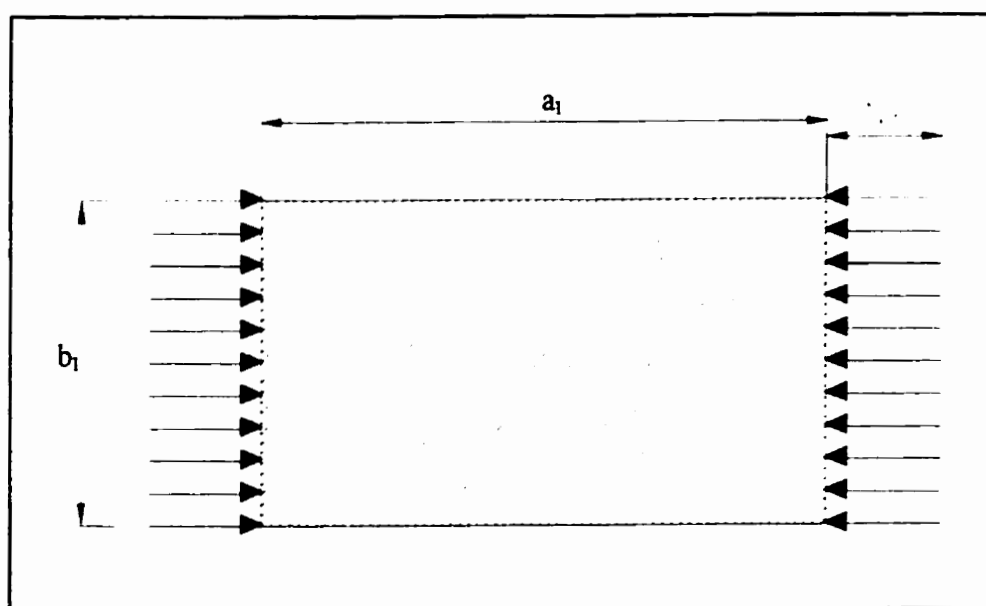


Figure B.1 : Plaque comprimée

Cette charge est évaluée comme suit (Timoshenko, 1947):

$$N_{cr} = \frac{k_c \pi^2 D_p}{b_1^2} \quad (\text{B.1})$$

où D_p est la rigidité de la plaque et s'évalue par:

$$D_p = \frac{Et_1^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{B.2})$$

Le facteur k_c est fonction du rapport hauteur/largeur (a_1/b_1). Pour une plaque carrée ($a_1/b_1=1$), k_c vaut 4. Il vaut également 4 pour une plaque deux fois plus longue que large ($a_1/b_1=2$).

Une plaque carrée de largeur de 600 mm et d'épaisseur $t=10$ mm, simplement appuyée sur ses quatre côtés sert pour cette étude de convergence. Sa charge critique obtenue de la théorie classique est de 2,008 kN/mm.

$$\begin{aligned} E &= 200 \text{ kN} / \text{mm}^2 \\ \nu &= 0,3 \\ a_1 &= 600 \text{ mm} \\ b_1 &= 600 \text{ mm} \\ t_1 &= 10 \text{ mm} \\ (a_1 / b_1) &= 1 \Rightarrow k_c = 4 \\ D_p &= \frac{Et_1^3}{12(1-\nu^2)} = 18315 \text{ kN} \cdot \text{mm} \\ N_{\sigma} &= \frac{k_c \pi^2 D_p}{b_1^2} = 2,008 \text{ kN} / \text{mm} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Cette plaque est modélisée avec des éléments de voile mince à 4 noeuds, à 8 noeuds et à 16 noeuds. En gardant la forme des éléments carrés, les modèles à 4 et 8 noeuds sont établis de manière à avoir le même nombre total de noeuds que l'utilisation d'un ensemble de 4 éléments à 16 noeuds, ce qui correspond à 36 éléments à 4 noeuds et 9 éléments à 8 noeuds. Des modèles avec un seul élément de chaque type, de 4 éléments

de chaque type et de 9 éléments à 4 noeuds sont aussi créés. Le tableau B.1 et la figure B.2 résument les modèles utilisés ainsi que les résultats obtenus par ADINA.

Tableau B.1 : Étude de convergence sur une plaque comprimée

Type d'élément	Nombre d'éléments	Nombre total de noeuds	Charge critique (kN/mm)
4 noeuds	1	4	2,980
4 noeuds	4	9	2,188
4 noeuds	9	16	2,082
4 noeuds	36	49	2,022
8 noeuds	1	8	2,162
8 noeuds	4	21	2,261
8 noeuds	9	49	2,003
16 noeuds	1	16	2,010
16 noeuds	4	49	2,003

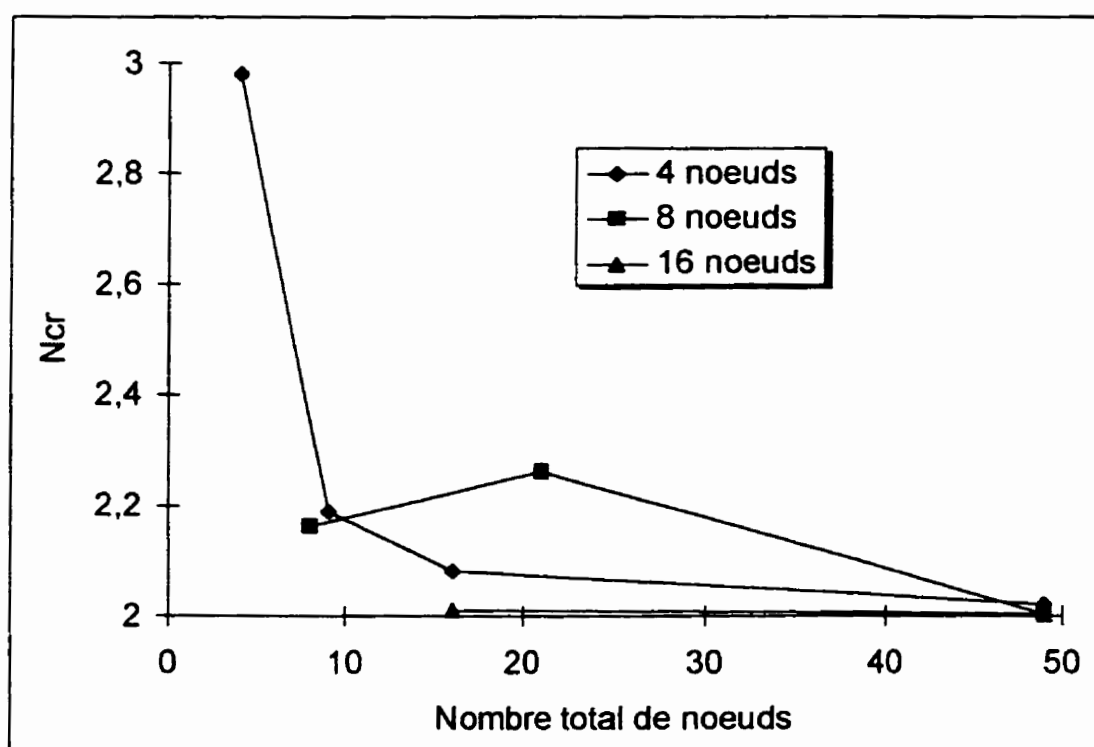


Figure B.2 : Étude de convergence sur une plaque carrée comprimée

On pourra remarquer que les trois types d'éléments donnent de très bons résultats pour un modèle comportant 49 noeuds. Toutefois, deux facteurs vont nous faire préférer l'utilisation des éléments à 16 noeuds.

Tout d'abord, le comportement des éléments à 8 noeuds qui semblent osciller avant de converger nous les fait éliminer d'office. Ce genre de comportement peut paraître étrange au premier coup d'oeil car on s'attend généralement à ce que la précision du modèle augmente avec le nombre d'éléments. Ce comportement oscillatoire n'est toutefois pas nouveau. Il a été obtenu par Batoz et Dhatt (1990) pour une plaque carrée encastree soumise à un chargement perpendiculaire. Dans ce problème, les éléments à 8

noeuds présentaient également un comportement oscillatoire alors que les éléments à 4 noeuds et 16 noeuds n'exhibaient pas un tel comportement.

Pour départir les deux types d'éléments restants, on remarquera que les éléments à 16 noeuds convergent plus rapidement que ceux à 4 noeuds. Pour un nombre total de 16 noeuds, les éléments à 16 noeuds donnent une erreur de 0,1% alors que les éléments à 4 noeuds donnent une erreur de 3,7%. Notre modèle sera donc basé principalement sur des éléments à 16 noeuds pour les éléments où le flambement en compression est un aspect à considérer dans l'analyse.

B.1.2 Plaque en flexion

Pour confirmer les résultats obtenus sur une plaque sollicitée en compression, les mêmes modèles sont soumis à un chargement en flexion (figure B.3). La théorie classique nous donne la contrainte critique pour le problème d'une plaque simplement appuyée sur ses 4 côtés et soumise, dans son propre plan, à un effort de compression et de flexion combiné (Timoshenko, 1947).

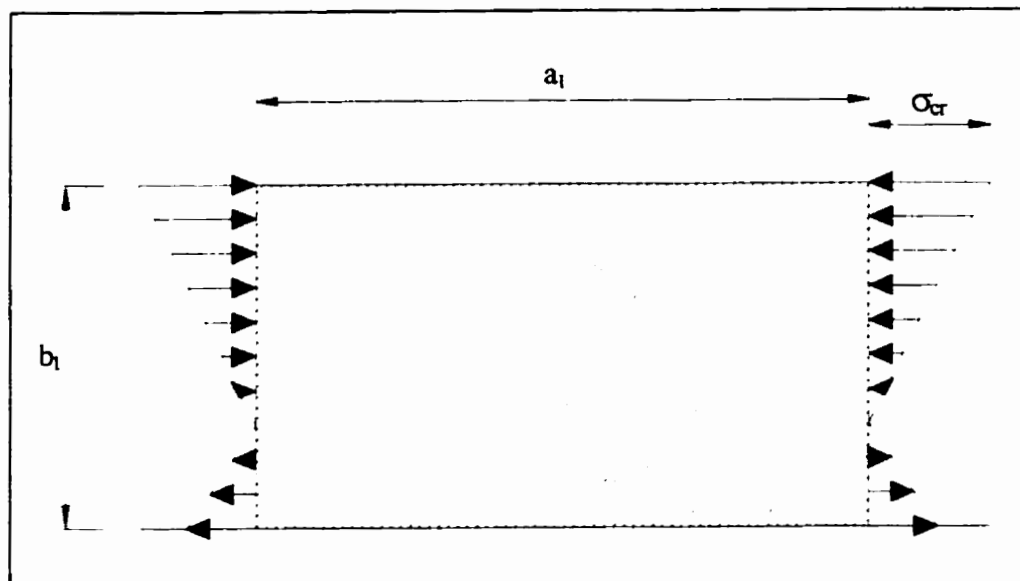


Figure B.3 : Plaque en flexion

$$\sigma_{cr} = k_f \frac{\pi^2 D_p}{b_1^2 t_1} \quad (\text{B.4})$$

où D_p est la rigidité de la plaque et s'évalue par:

$$D_p = \frac{Et_1^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{B.5})$$

Le facteur k_f est fonction du rapport hauteur/largeur (a_1/b_1) de même que du paramètre α qui caractérise le rapport compression/flexion. Pour un cas de flexion pure, $\alpha=2$. Pour notre plaque carrée ($a_1/b_1=1$) sollicitée en flexion pure, le facteur k_f vaut 25,6.

$$\sigma_{cr} = k_f \frac{\pi^2 D_p}{b_1^2 t_1} = 25,6 \frac{\pi^2 \cdot 18315 \text{ kN} \cdot \text{mm}}{600^2 \cdot 10} = 1,2854 \text{ kN} / \text{mm}^2$$

$$t_1 = 10 \text{ mm} \Rightarrow N_{cr} = 10 \cdot 1,2854 = 12,854 \text{ kN} / \text{mm} \quad (\text{B.6})$$

Les mêmes modèles que pour l'étude de convergence pour une plaque en compression sont utilisés. Les résultats obtenus sont regroupés au tableau B.2 et représentés à la figure B.4.

Tableau B.2 : Étude de convergence sur une plaque fléchie

Type d'élément	Nombre d'éléments	Nombre total de noeuds	Charge critique (kN/mm)
4 noeuds	1	4	390
4 noeuds	4	9	19,02
4 noeuds	9	16	15,54
4 noeuds	36	49	13,91
8 noeuds	1	8	11,25
8 noeuds	4	21	13,73
8 noeuds	9	49	13,48
16 noeuds	1	16	14,56
16 noeuds	4	49	13,47

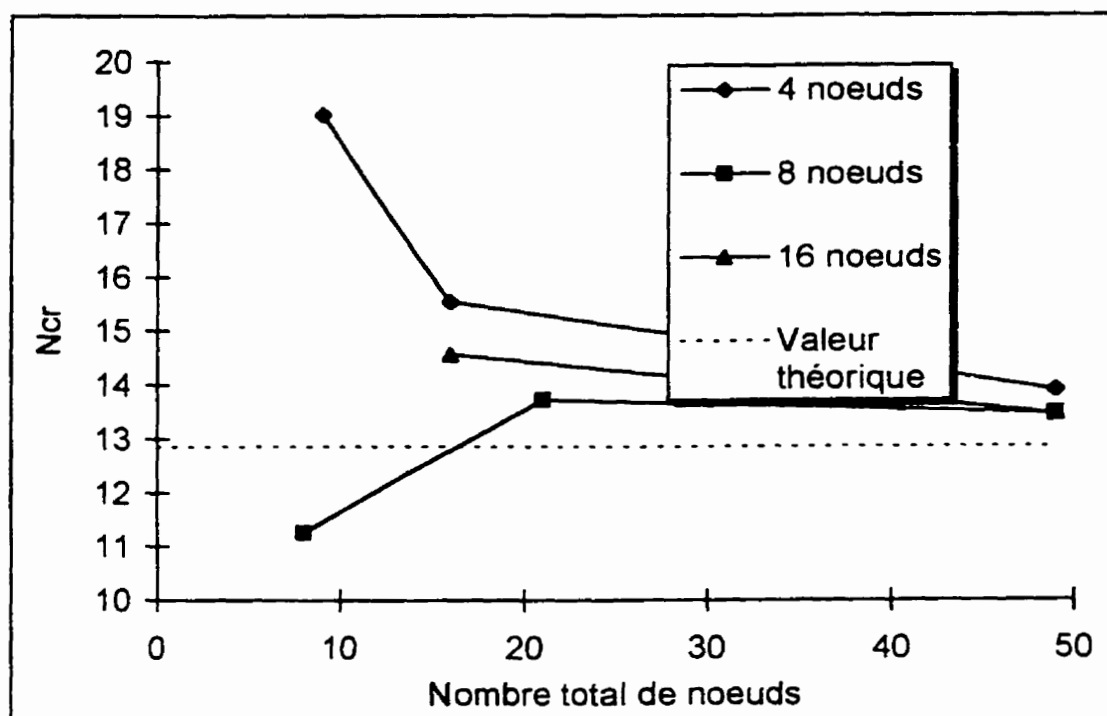


Figure B.4 : Étude de convergence sur une plaque carrée fléchie

Les mêmes remarques que pour une plaque comprimée s'appliquent: les éléments à 16 noeuds sont ceux qui possèdent la convergence la plus rapide et les éléments à 8 noeuds montrent un comportement qui oscille. Ceci confirme notre choix d'utiliser les éléments de voiles minces à 16 noeuds comme éléments principaux de modélisation.

B.2 Étude de convergence sur le maillage

Sachant maintenant que nous allons utiliser l'élément de voile mince à 16 noeuds, il faut établir la quantité d'éléments nécessaires à une solution acceptable, en d'autres termes : définir le degré de raffinement du maillage.

La poutre-maitresse du pont type est ainsi modélisée avec différents degrés de raffinement du maillage. Pour pouvoir comparer les résultats des éléments finis avec des résultats connus, seule la poutre maitresse, sans entretoises ni raidisseurs, est utilisée. Les conditions frontières imposées ont été choisies pour correspondre à celles utilisées dans le développement théorique usuel d'une poutre en déversement (voir section 2.1).

Le problème utilisé pour l'étude de convergence sur le maillage se résume alors à une poutre sur appuis simples, retenue latéralement à ses extrémités mais dont le gauchissement est libre et dont la section est de 450x55 pour les semelles et de 2645x16 pour l'âme (la longueur de 2645 mm est la distance entre les centres de gravité des semelles).

Cette poutre est soumise à un moment uniforme puis à une charge uniforme située successivement à l'aile supérieure, à l'aile inférieure et enfin au centre de gravité. Le chargement est appliqué, dans les quatre cas, sous la forme de charges ponctuelles aux noeuds. Il a donc été nécessaire de calculer les charges équivalentes à des charges réparties pour l'élément utilisé. On retrouvera à l'annexe C l'intégration de ces charges équivalentes pour des éléments de voiles minces à 4, 8 et 16 noeuds.

Le mode de déversement obtenu de ces analyses correspond au mode de déversement prévu par la théorie classique, à savoir un déplacement, de forme sinusoïdale, de la semelle supérieure et une rotation de la section dans son ensemble. (figure B.5 à B.7). Visuellement, il ne semble pas y avoir de distorsion de la section bien

que les moments de déversements laissent entrevoir l'effet d'une certaine distorsion, dont nous discuterons plus loin.

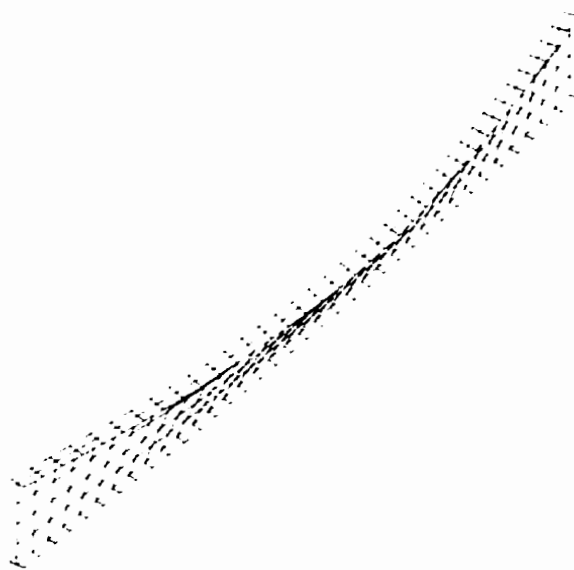


Figure B.5 : Poutre classique, vue isométrique

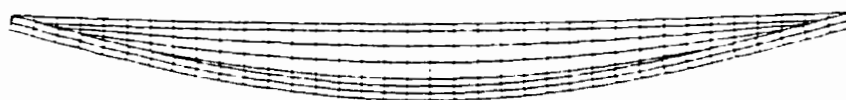


Figure B.6 : Poutre classique, vue en plan



Figure B.7 : Poutre classique, section

B.2.1 Maillage de l'âme

La poutre étudiée étant très élancée, c'est l'âme qui joue un rôle prédominant dans le comportement du modèle. La première partie de l'étude de convergence porte ainsi sur l'âme plus particulièrement. Cette dernière a été modélisée en utilisant de 1 à 4 éléments à 16 noeuds pour la profondeur de l'âme. Le nombre d'éléments sur la longueur et dans les semelles a été ajusté de façon à avoir des éléments le plus carré possible. Seuls des éléments à 4 noeuds modélisent alors les semelles.

Pour confirmer le choix de l'utilisation des éléments à 16 noeuds, les mêmes modèles ont été réalisés en éléments de 4 noeuds. Les tableaux B.4 et B.5 résument les résultats des différents modèles étudiés. Le calcul du moment de déversement théorique a été fait avec la formule B.7 telle que présentée dans la norme S16.1 et revue au chapitre 2 (voir équation 2.26)

$$M_{ue} = \frac{\omega_2 \pi}{L_s} \sqrt{EI_y GJ + \left(\frac{\pi}{L_s} \right)^2 EI_y EC_w} \quad (\text{B.7})$$

Pour le cas du moment uniforme, la valeur de ω_2 est de 1,0. Pour les cas de charge uniforme, les équations présentées dans l'ouvrage de Picard et Beaulieu (1991) ont été utilisées. Les charges théoriques prévues sont regroupées au tableau B.3

Tableau B.3 : Moments critiques théoriques

Type de chargement	M_{uc} (kN*m)
Moment uniforme	4743
Charge uniforme à la semelle supérieure	3850
Charge uniforme au centre de gravité	5360
Charge uniforme à la semelle inférieure	7450

Tableau B.4 : Étude de convergence : éléments à 16 noeuds pour l'âme

Nb total de noeuds	---	248	671	1274	1853	2289	2725
Nombre d'éléments	Âme(16 noeuds)	1	2	3	4	4	4
	Semelle(4 noeuds)	2	2	2	2	4	6
	Longueur	10	20	30	36	36	36
M_{cr} (% M_{cr} théorique)	Moment uniforme	190	120	105	103	99	99
	Charge uniforme (aile supérieure)	161	111	101	98	96	96
	Charge uniforme (centre de gravité)	---	112	97	98	97	96
	Charge uniforme (aile inférieure)	168	112	100	97	95	95

Tableau B.5 : Étude de convergence : éléments à 4 noeuds pour l'âme

Nb total de noeuds	---	360	660	1040	1360	1900
Nombre d'éléments	Âme(4 noeuds)	4	6	8	8	10
	Semelle(4 noeuds)	2	2	2	4	4
	Longueur	40	60	80	80	100
M_{cr} (% M_{cr} théorique)	Moment uniforme	151	122	111	109	105
	Charge uniforme (aile supérieure)	143	116	107	105	101
	Charge uniforme (centre de gravité)	148	116	107	105	101
	Charge uniforme (aile inférieure)	150	116	106	104	100

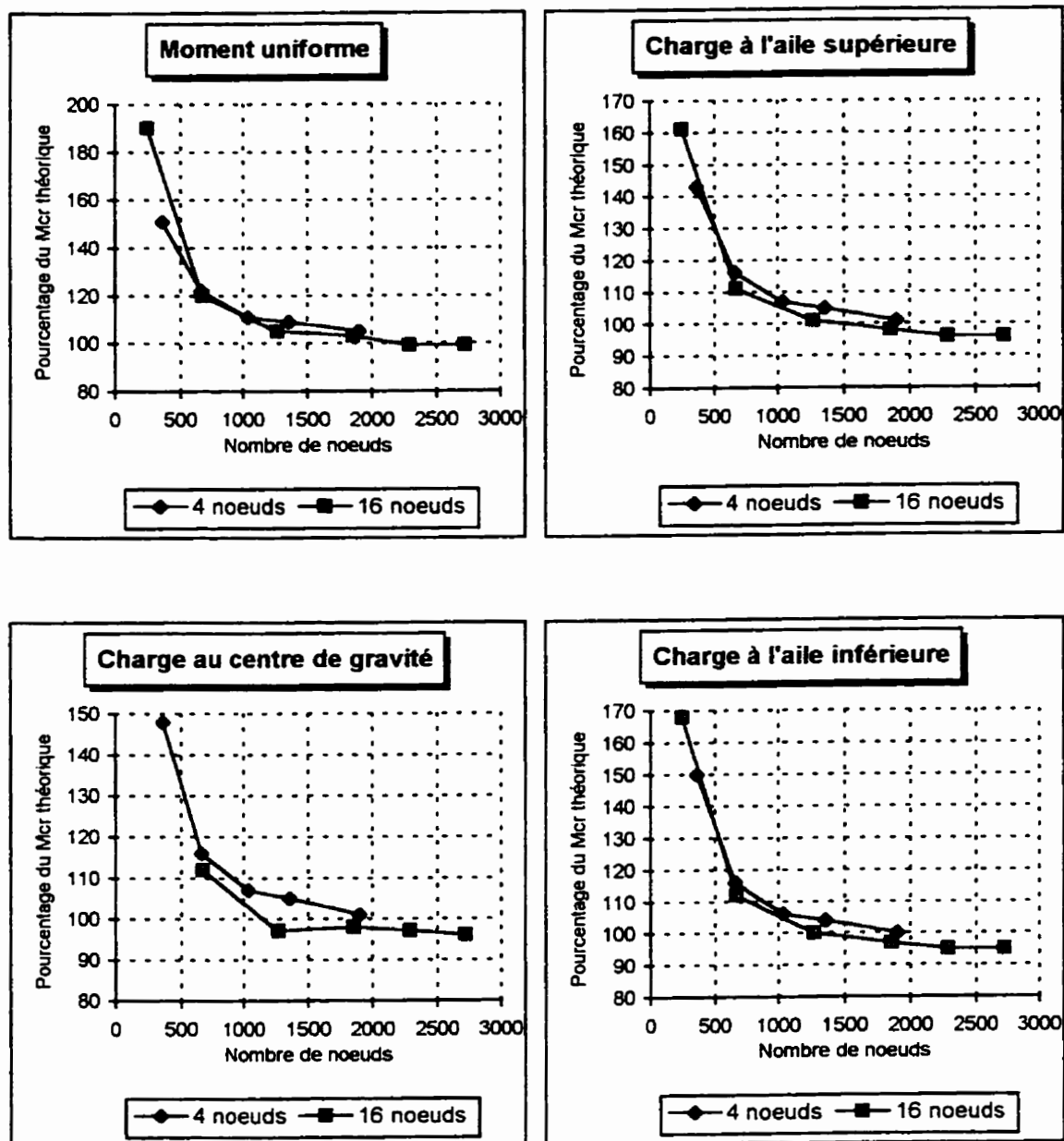


Figure B.8: Étude de convergence du maillage de l'âme

À la lumière de ces résultats, plusieurs observations peuvent être faites. Premièrement, quatre éléments au niveau de l'âme semblent être un bon niveau de raffinement. À la limite, trois éléments auraient peut-être suffi à la tâche. Deuxièmement, les éléments à 16 noeuds convergent plus rapidement que ceux à 4 noeuds, ce qui était prévu. Troisièmement, la méthode de Picard et Beaulieu pour tenir compte du chargement donne des bons résultats bien qu'elle semble légèrement surestimer le moment de déversement. Finalement, on peut remarquer que les moments de déversement obtenus sont légèrement plus faibles que ceux prédits par la théorie classique et ce, même pour une poutre soumise à un moment uniforme. La raison de cette différence provient vraisemblablement de la distorsion de la section dont la théorie ne tient pas compte.

Le maillage choisi comportera donc 4 éléments de voiles minces à 16 noeuds sur la profondeur de la poutre. Nous utiliserons 36 éléments sur la longueur. Un nombre plus faible aurait pu être correct. Toutefois, le pont-type étant divisé en 18 panneaux, la modélisation fidèle du pont sera simplifiée par l'utilisation de 36 éléments.

B.2.2 Maillage des semelles

Les résultats démontrent également que le maillage des semelles a peu d'influence sur le déversement. Il a donc été décidé d'utiliser 2 éléments de voiles minces à 16 noeuds pour chaque semelle. Ceci correspond au même nombre de noeuds que l'utilisation de 6 éléments de voiles minces à 4 noeuds par semelle. Le moment de

déversement aurait dû être le même, or ce n'est pas le cas. Le moment obtenu pour un même nombre de noeuds mais en utilisant des éléments à 16 noeuds pour les semelles plutôt que des éléments à 4 noeuds est beaucoup plus faible. De plus, ce moment est bien en dessous du moment théorique. Ce résultat se produit pour les 4 chargements étudiés.

Tableau B.6 : Étude de convergence, éléments utilisés dans les semelles

Éléments (semelle)	Moment uniforme		Charge uniforme (aile supérieure)		Charge uniforme (centroïde)		Charge uniforme (aile inférieure)	
	(kN*m)	% théo.	(kN*m)	% théo.	(kN*m)	% théo.	(kN*m)	% théo.
Théorie	4743	---	3850	---	5360	---	7450	---
4 noeuds	4712	99	3682	96	5166	96	7085	95
16 noeuds	4342	92	3389	88	4734	88	6468	87

Ce résultat peut peut-être s'expliquer par la difficulté qu'ont les éléments à 4 noeuds à reproduire les dérivées d'ordre supérieur qui caractérisent entre autres le phénomène du gauchissement. En effet, les éléments à 16 noeuds sont définis par des équations du troisième degré alors que les éléments à 4 noeuds (et possédant donc 2 noeuds par côté) sont linéaires. Le bon résultat devrait donc être celui fourni par les éléments à 16 noeuds. Le problème n'est pas la différence entre les résultats des deux types d'éléments. Il est plutôt la grande différence (près de 12%) entre les résultats du modèle et les résultats théoriques.

Cette différence est due à la distorsion de la section qui est négligée dans l'analyse classique. Des modèles supplémentaires où la distorsion a été supprimée ont été créés

pour le vérifier. Dans ces modèles, la distorsion a été supprimée en imposant que tous les noeuds de chaque section le long de la poutre subissent la même rotation autour de l'axe longitudinal. Chaque section le long de la poutre possède alors un seul degré de liberté en rotation au lieu d'un degré de liberté par noeud.

La distorsion a d'abord été enlevée seulement au niveau de l'âme puis dans l'âme et dans les semelles. Seul le cas du chargement par moment uniforme a été considéré puisqu'on a vu précédemment que le type de chargement n'influence pas vraiment la qualité de la réponse.

Tableau B.7 : Étude de convergence, phénomène de la distorsion

	Éléments à 4 noeuds (semelles)		Éléments à 16 noeuds (semelles)	
	(kN*m)	%théorie	(kN*m)	%théorie
Distorsion permise	4712	99,3	4342	91,5
Distorsion empêchée pour l'âme seulement	4940	104,1	4564	96,2
Distorsion complètement empêchée	4954	104,4	4583	96,6

On voit que le fait d'enlever la distorsion rapproche sensiblement la réponse du modèle à éléments à 16 noeuds pour les semelles de la réponse théorique. On considérera une erreur de moins de 4% comme étant suffisamment petite pour justifier l'utilisation de notre modèle.

ANNEXE C

INTÉGRATION DES CHARGES ÉQUIVALENTES

C.1 Élément sans noeud intermédiaire, charge triangulaire

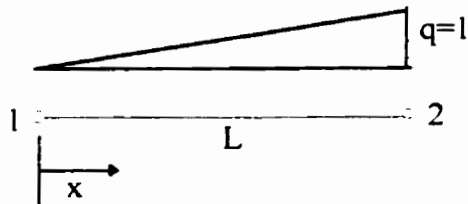


Figure C.1 : Élément sans noeud intermédiaire, charge triangulaire

$$x_1 = 0 \quad x_2 = L \quad q = \frac{x}{L} \quad (C.1)$$

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad N_2 = \frac{x}{L} \quad (C.2)$$

$$\begin{aligned} r_1 &= \int_0^L N_1 q \, dx \\ r_1 &= \int_0^L \left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right) dx = \frac{L}{6} \\ r_2 &= \int_0^L \frac{x^2}{L^2} dx = \frac{L}{3} \end{aligned} \quad (C.3)$$

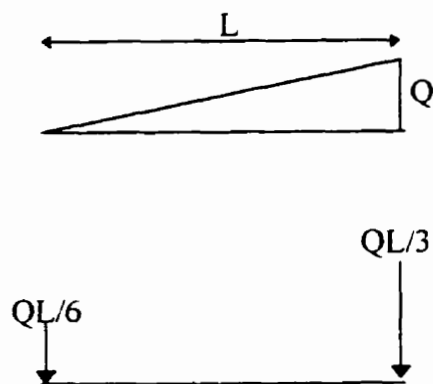


Figure C.2 :Charges équivalentes pour une charge triangulaire, élément sans noeud intermédiaire

C.2 Élément sans noeud intermédiaire, charge constante

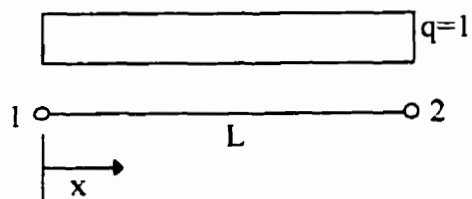


Figure C.3 : Élément sans noeud intermédiaire, charge constante

$$x_1 = 0 \quad x_2 = L \quad q = 1 \quad (C.4)$$

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad N_2 = \frac{x}{L} \quad (C.5)$$

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \int_0^L N_1 q \, dx \\
 r_1 &= \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \\
 r_2 &= \int_0^L \frac{x}{L} dx = \frac{L}{2}
 \end{aligned}
 \tag{C.6}$$

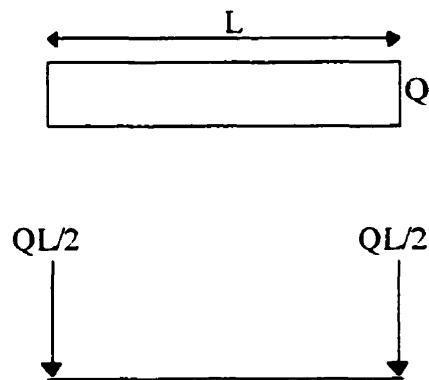


Figure C.4 :Charges équivalentes pour une charge triangulaire, élément sans noeud intermédiaire

C.3 Élément avec un noeud intermédiaire, charge triangulaire

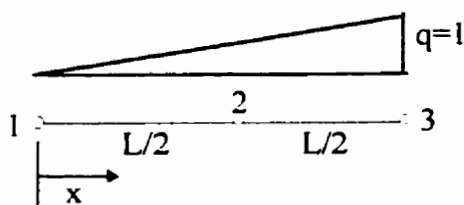


Figure C.5 : Élément avec un noeud intermédiaire, charge triangulaire

$$x_1 = 0 \quad x_2 = L/2 \quad x_3 = L \quad q = x/L \quad (C.7)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(x_2 - x)(x_3 - x)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} = 1 - 3\frac{x}{L} + 2\frac{x^2}{L^2} \\ N_2 &= \frac{(x_1 - x)(x_3 - x)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)} = 4\frac{x}{L} - 4\frac{x^2}{L^2} \\ N_3 &= \frac{(x_1 - x)(x_2 - x)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} = -\frac{x}{L} + 2\frac{x^2}{L^2} \end{aligned} \quad (C.8)$$

$$\begin{aligned} r_1 &= \int_0^L N_1 q dx = \int_0^L \left(\frac{x}{L} - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \right) dx = 0 \\ r_2 &= \int_0^L N_2 q dx = \int_0^L \left(4\frac{x^2}{L^2} - 4\frac{x^3}{L^3} \right) dx = \frac{L}{3} \\ r_3 &= \int_0^L N_3 q dx = \int_0^L \left(-\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \right) dx = \frac{L}{6} \end{aligned} \quad (C.9)$$

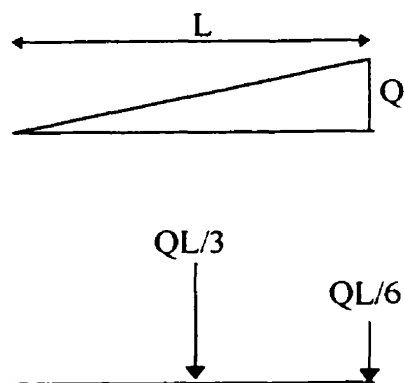


Figure C.6 : Charges équivalentes pour une charge triangulaire, élément avec un noeud intermédiaire

C.4 Élément avec un noeud intermédiaire, charge constante

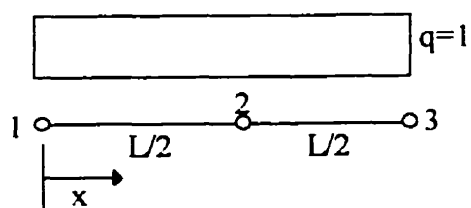


Figure C.7 : Élément avec un noeud intermédiaire, charge constante

$$x_1 = 0 \quad x_2 = L/2 \quad x_3 = L \quad q = 1 \quad (C.10)$$

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{(x_2 - x)(x_3 - x)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} = 1 - 3\frac{x}{L} + 2\frac{x^2}{L^2} \\
 N_2 &= \frac{(x_1 - x)(x_3 - x)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)} = 4\frac{x}{L} - 4\frac{x^2}{L^2} \\
 N_3 &= \frac{(x_1 - x)(x_2 - x)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} = -\frac{x}{L} + 2\frac{x^2}{L^2}
 \end{aligned} \tag{C.11}$$

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \int_0^L N_1 q \, dx = \int_0^L \left(1 - 3\frac{x}{L} + 2\frac{x^2}{L^2}\right) dx = \frac{L}{6} \\
 r_2 &= \int_0^L N_2 q \, dx = \int_0^L \left(4\frac{x}{L} - 4\frac{x^2}{L^2}\right) dx = \frac{L}{3} \\
 r_3 &= \int_0^L N_3 q \, dx = \int_0^L \left(-\frac{x}{L} + 2\frac{x^2}{L^2}\right) dx = \frac{L}{6}
 \end{aligned} \tag{C.12}$$

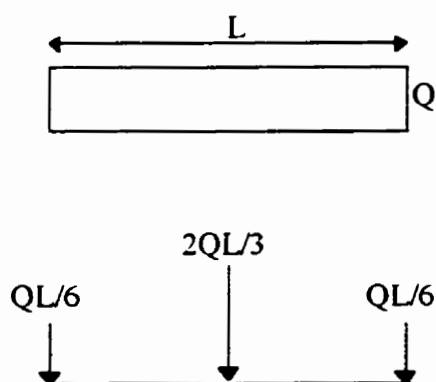


Figure C.8 : Charges équivalentes pour une charge constante, élément avec un noeud intermédiaire

C.5 Élément avec deux noeuds intermédiaires, charge triangulaire

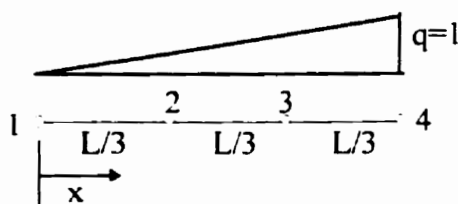


Figure C.9 : Élément avec deux noeuds intermédiaires, charge triangulaire

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{L}{3} \quad x_3 = \frac{2L}{3} \quad x_4 = L \quad q = x/L \quad (\text{C.13})$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(x_2 - x)(x_3 - x)(x_4 - x)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)} = 1 - \frac{11x}{2L} + 9\frac{x^2}{L^2} - \frac{9x^3}{2L^3} \\ N_2 &= \frac{(x_1 - x)(x_3 - x)(x_4 - x)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)} = 9\frac{x}{L} - \frac{45x^2}{2L^2} + \frac{27x^3}{2L^3} \\ N_3 &= \frac{(x_1 - x)(x_2 - x)(x_4 - x)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_4 - x_3)} = -\frac{9x}{2L} + 18\frac{x^2}{L^2} - \frac{27x^3}{2L^3} \\ N_4 &= \frac{(x_1 - x)(x_2 - x)(x_3 - x)}{(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)} = \frac{x}{L} - \frac{9x^2}{2L^2} + \frac{9x^3}{2L^3} \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \int_0^L \frac{x}{L} - \frac{11}{2} \frac{x^2}{L^2} + 9 \frac{x^3}{L^3} - \frac{9}{2} \frac{x^4}{L^4} dx = \frac{2L}{120} \\
 r_2 &= \int_0^L 9 \frac{x^2}{L^2} - \frac{45}{2} \frac{x^3}{L^3} + \frac{27}{2} \frac{x^4}{L^4} dx = \frac{9L}{120} \\
 r_3 &= \int_0^L -\frac{9}{2} \frac{x^2}{L^2} + 18 \frac{x^3}{L^3} - \frac{27}{2} \frac{x^4}{L^4} dx = \frac{36L}{120} \\
 r_4 &= \int_0^L \frac{x^2}{L^2} - \frac{9}{2} \frac{x^3}{L^3} + \frac{9}{2} \frac{x^4}{L^4} dx = \frac{13L}{120}
 \end{aligned}
 \tag{C.15}$$

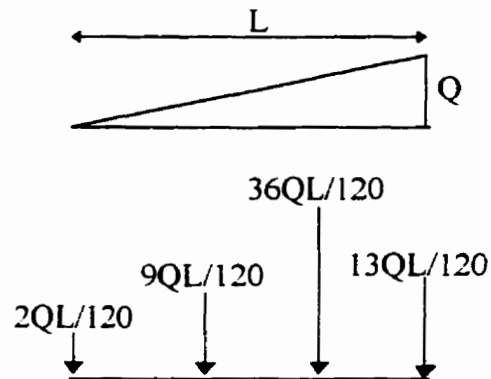


Figure C.10 : Charges équivalentes pour une charge triangulaire, élément avec deux noeuds intermédiaires

C.6 Élément avec deux noeuds intermédiaires, charge constante

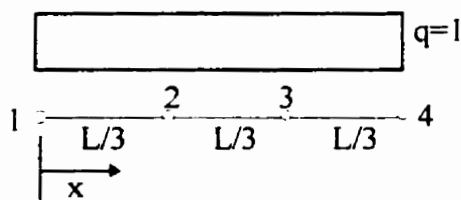


Figure C.11 : Élément avec deux noeuds intermédiaires, charge constante

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{L}{3} \quad x_3 = \frac{2L}{3} \quad x_4 = L \quad q = 1 \quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(x_2 - x)(x_3 - x)(x_4 - x)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)} = 1 - \frac{11}{2} \frac{x}{L} + 9 \frac{x^2}{L^2} - \frac{9}{2} \frac{x^3}{L^3} \\ N_2 &= \frac{(x_1 - x)(x_3 - x)(x_4 - x)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)} = 9 \frac{x}{L} - \frac{45}{2} \frac{x^2}{L^2} + \frac{27}{2} \frac{x^3}{L^3} \\ N_3 &= \frac{(x_1 - x)(x_2 - x)(x_4 - x)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_4 - x_3)} = -\frac{9}{2} \frac{x}{L} + 18 \frac{x^2}{L^2} - \frac{27}{2} \frac{x^3}{L^3} \\ N_4 &= \frac{(x_1 - x)(x_2 - x)(x_3 - x)}{(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)} = \frac{x}{L} - \frac{9}{2} \frac{x^2}{L^2} + \frac{9}{2} \frac{x^3}{L^3} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \int_0^L 1 - \frac{11}{2} \frac{x}{L} + 9 \frac{x^2}{L^2} - \frac{9}{2} \frac{x^3}{L^3} dx = \frac{L}{8} \\
 r_2 &= \int_0^L 9 \frac{x}{L} - \frac{45}{2} \frac{x^2}{L^2} + \frac{27}{2} \frac{x^3}{L^3} dx = \frac{3L}{8} \\
 r_3 &= \int_0^L -\frac{9}{2} \frac{x}{L} + 18 \frac{x^2}{L^2} - \frac{27}{2} \frac{x^3}{L^3} dx = \frac{3L}{8} \\
 r_4 &= \int_0^L \frac{x}{L} - \frac{9}{2} \frac{x^2}{L^2} + \frac{9}{2} \frac{x^3}{L^3} dx = \frac{L}{8}
 \end{aligned}
 \tag{C.18}$$

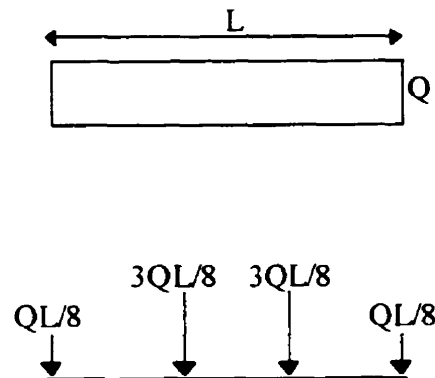


Figure C.12 : Charges équivalentes pour une charge constante, élément avec deux noeuds intermédiaires

C.7 Élément avec deux noeuds intermédiaires, charge triangulaire double

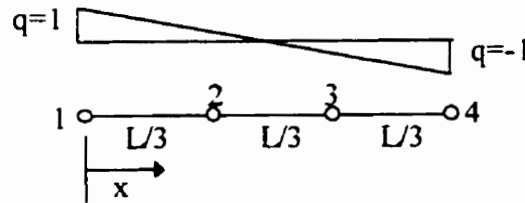


Figure C.13 : Élément avec deux noeuds intermédiaires, charge triangulaire double

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{L}{3} \quad x_3 = \frac{2L}{3} \quad x_4 = L \quad q = 1 - \frac{2x}{L} \quad (\text{C.19})$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(x_2 - x)(x_3 - x)(x_4 - x)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)} = 1 - \frac{11x}{2L} + 9\frac{x^2}{L^2} - \frac{9x^3}{2L^3} \\ N_2 &= \frac{(x_1 - x)(x_3 - x)(x_4 - x)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)} = 9\frac{x}{L} - \frac{45x^2}{2L^2} + \frac{27x^3}{2L^3} \\ N_3 &= \frac{(x_1 - x)(x_2 - x)(x_4 - x)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_4 - x_3)} = -\frac{9x}{2L} + 18\frac{x^2}{L^2} - \frac{27x^3}{2L^3} \\ N_4 &= \frac{(x_1 - x)(x_2 - x)(x_3 - x)}{(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)} = \frac{x}{L} - \frac{9x^2}{2L^2} + \frac{9x^3}{2L^3} \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \int_0^L \left(1 - \frac{15}{2} \frac{x}{L} + 20 \frac{x^2}{L^2} - \frac{45}{2} \frac{x^3}{L^3} + 9 \frac{x^4}{L^4} \right) dx = \frac{11L}{120} \\
 r_2 &= \int_0^L \left(9 \frac{x}{L} - \frac{81}{2} \frac{x^2}{L^2} + \frac{117}{2} \frac{x^3}{L^3} - 27 \frac{x^4}{L^4} \right) dx = \frac{27L}{120} \\
 r_3 &= \int_0^L \left(-\frac{9}{2} \frac{x}{L} + 27 \frac{x^2}{L^2} - \frac{99}{2} \frac{x^3}{L^3} + 27 \frac{x^4}{L^4} \right) dx = -\frac{27L}{120} \\
 r_4 &= \int_0^L \left(\frac{x}{L} - \frac{13}{2} \frac{x^2}{L^2} + \frac{27}{2} \frac{x^3}{L^3} - 9 \frac{x^4}{L^4} \right) dx = -\frac{11L}{120}
 \end{aligned} \tag{C.21}$$

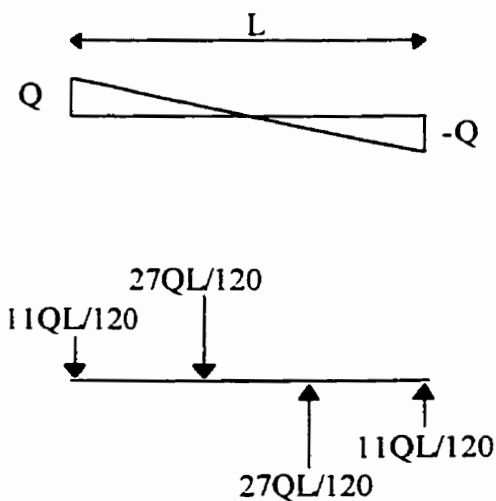


Figure C.14 : Charges équivalentes pour une charge triangulaire double, élément avec deux noeuds intermédiaires

ANNEXE D

MÉTHODE ÉNERGÉTIQUE

Les termes suivants sont les termes de la matrice qui est dérivée au chapitre 6.

section 1.4. Ils sont présentés dans un format informatique dans un but de concision.

$$\begin{aligned}
 M11 = & (-144*a*D*L)/(5*(-a+h)^4) + (6*a^4*D*L)/(h^3*(-a+h)^4) - \\
 & (24*a^3*D*L)/(h^2*(-a+h)^4) + (188*a^2*D*L)/(5*h*(-a+h)^4) + \\
 & (48*D*h*L)/(5*(-a+h)^4) - (24*a^3*D*mu*Pi^2)/(5*(-a+h)^4*L) + \\
 & (6*a^4*D*mu*Pi^2)/(5*h*(-a+h)^4*L) + \\
 & (764*a^2*D*h*mu*Pi^2)/(105*(-a+h)^4*L) - \\
 & (176*a*D*h^2*mu*Pi^2)/(35*(-a+h)^4*L) + \\
 & (48*D*h^3*mu*Pi^2)/(35*(-a+h)^4*L) + \\
 & (13*a^4*D*h*Pi^4)/(70*(-a+h)^4*L^3) - \\
 & (149*a^3*D*h^2*Pi^4)/(210*(-a+h)^4*L^3) + \\
 & (1261*a^2*D*h^3*Pi^4)/(1260*(-a+h)^4*L^3) - \\
 & (13*a*D*h^4*Pi^4)/(21*(-a+h)^4*L^3) + (D*h^5*Pi^4)/(7*(-a+h)^4*L^3) + \\
 & (E*Iy1*Pi^4)/(2*L^3) - (b1*d1*M*Pi^2*t1)/(2*Ix*L) + \\
 & (13*a^4*d2*h*M*Pi^2*w)/(70*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
 & (a^4*h^2*M*Pi^2*w)/(7*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
 & (149*a^3*d2*h^2*M*Pi^2*w)/(210*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
 & (139*a^3*h^3*M*Pi^2*w)/(252*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
 & (1261*a^2*d2*h^3*M*Pi^2*w)/(1260*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
 & (221*a^2*h^4*M*Pi^2*w)/(280*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
 & (13*a^4*d2*h^4*M*Pi^2*w)/(21*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
 & (313*a^4*h^5*M*Pi^2*w)/(630*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
 & (d2*h^5*M*Pi^2*w)/(7*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
 & (7*h^6*M*Pi^2*w)/(60*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
 & (4*a^3*G*Pi^2*w^3)/(5*(-a+h)^4*L) + \\
 & (a^4*G*Pi^2*w^3)/(5*h*(-a+h)^4*L) + \\
 & (382*a^2*G*h*Pi^2*w^3)/(315*(-a+h)^4*L) - \\
 & (88*a*G*h^2*Pi^2*w^3)/(105*(-a+h)^4*L) + \\
 & (8*G*h^3*Pi^2*w^3)/(35*(-a+h)^4*L)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M12 = & (144*a*D*L)/(5*(-a+h)^4) - (6*a^4*D*L)/(h^3*(-a+h)^4) + \\
 & (24*a^3*D*L)/(h^2*(-a+h)^4) - (188*a^2*D*L)/(5*h*(-a+h)^4) - \\
 & (48*D*h*L)/(5*(-a+h)^4) - (4*D*h^2*L)/(5*a*(-a+h)^4) + \\
 & (6*D*h^3*L)/(5*a^2*(-a+h)^4) + (24*a^3*D*mu*Pi^2)/(5*(-a+h)^4*L) - \\
 & (6*a^4*D*mu*Pi^2)/(5*h*(-a+h)^4*L) - \\
 & (764*a^2*D*h*mu*Pi^2)/(105*(-a+h)^4*L) + \\
 & (176*a*D*h^2*mu*Pi^2)/(35*(-a+h)^4*L) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (48*D*h^3*mu*Pi^2)/(35*(-a+h)^4*L) - \\
& (4*D*h^4*mu*Pi^2)/(105*a*(-a+h)^4*L) + \\
& (2*D*h^5*mu*Pi^2)/(35*a^2*(-a+h)^4*L) + \\
& (9*a^4*D*h*Pi^4)/(140*(-a+h)^4*L^3) - \\
& (9*a^3*D*h^2*Pi^4)/(35*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (241*a^2*D*h^3*Pi^4)/(630*(-a+h)^4*L^3) - \\
& (26*a*D*h^4*Pi^4)/(105*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (41*D*h^5*Pi^4)/(840*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (19*D*h^6*Pi^4)/(1260*a*(-a+h)^4*L^3) - \\
& (D*h^7*Pi^4)/(168*a^2*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (9*a^4*d2*h*M*Pi^2*w)/(140*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (9*a^4*h^2*M*Pi^2*w)/(280*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (9*a^3*d2*h^2*M*Pi^2*w)/(35*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (83*a^3*h^3*M*Pi^2*w)/(630*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (241*a^2*d2*h^3*M*Pi^2*w)/(630*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (17*a^2*h^4*M*Pi^2*w)/(84*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (26*a*d2*h^4*M*Pi^2*w)/(105*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (43*a*h^5*M*Pi^2*w)/(315*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (41*d2*h^5*M*Pi^2*w)/(840*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (143*h^6*M*Pi^2*w)/(5040*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (19*d2*h^6*M*Pi^2*w)/(1260*a*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (23*h^7*M*Pi^2*w)/(2520*a^2*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (d2*h^7*M*Pi^2*w)/(168*a^2*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (19*h^8*M*Pi^2*w)/(5040*a^2*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (4*a^3*G*Pi^2*w^3)/(5*(-a+h)^4*L) - \\
& (a^4*G*Pi^2*w^3)/(5*h*(-a+h)^4*L) - \\
& (382*a^2*G*h*Pi^2*w^3)/(315*(-a+h)^4*L) + \\
& (88*a*G*h^2*Pi^2*w^3)/(105*(-a+h)^4*L) - \\
& (8*G*h^3*Pi^2*w^3)/(35*(-a+h)^4*L) - \\
& (2*G*h^4*Pi^2*w^3)/(315*a*(-a+h)^4*L) + \\
& (G*h^5*Pi^2*w^3)/(105*a^2*(-a+h)^4*L)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M13 = & (-94*a^2*D*L)/(5*(-a+h)^4) - (3*a^4*D*L)/(h^2*(-a+h)^4) + \\
& (12*a^3*D*L)/(h*(-a+h)^4) + (14*a^4*D*h*L)/(-a+h)^4 - \\
& (21*D*h^2*L)/(5*(-a+h)^4) - (3*a^4*D*mu*Pi^2)/(5*(-a+h)^4*L) + \\
& (7*a^3*D*h*mu*Pi^2)/(3*(-a+h)^4*L) - \\
& (143*a^2*D*h^2*mu*Pi^2)/(42*(-a+h)^4*L) + \\
& (78*a*D*h^3*mu*Pi^2)/(35*(-a+h)^4*L) - \\
& (39*D*h^4*mu*Pi^2)/(70*(-a+h)^4*L) - \\
& (11*a^4*D*h^2*Pi^4)/(420*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (13*a^3*D*h^3*Pi^4)/(140*(-a+h)^4*L^3) - \\
& (611*a^2*D*h^4*Pi^4)/(5040*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (5*a*D*h^5*Pi^4)/(72*(-a+h)^4*L^3) - \\
& (5*D*h^6*Pi^4)/(336*(-a+h)^4*L^3) - \\
& (11*a^4*d2*h^2*M*Pi^2*w)/(420*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (a^4*h^3*M*Pi^2*w)/(56*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (13*a^4*d2*h^3*M*Pi^2*w)/(140*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (65*a^3*h^4*M*Pi^2*w)/(1008*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (611*a^2*d2*h^4*M*Pi^2*w)/(5040*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (31*a^2*h^5*M*Pi^2*w)/(360*(-a+h)^4*Ix*L) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (5*a^2*d^2*h^5*M*Pi^2*w)/(72*(-a+h)^4*I*x*L) - \\
& (17*a^2*h^6*M*Pi^2*w)/(336*(-a+h)^4*I*x*L) - \\
& (5*d^2*h^6*M*Pi^2*w)/(336*(-a+h)^4*I*x*L) + \\
& (h^7*M*Pi^2*w)/(90*(-a+h)^4*I*x*L) - (a^4*G*Pi^2*w^3)/(60*(-a+h)^4*L) + \\
& (a^3*G*h*Pi^2*w^3)/(18*(-a+h)^4*L) - \\
& (17*a^2*G*h^2*Pi^2*w^3)/(252*(-a+h)^4*L) + \\
& (4*a*G*h^3*Pi^2*w^3)/(105*(-a+h)^4*L) - \\
& (G*h^4*Pi^2*w^3)/(105*(-a+h)^4*L)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M14 = & (-94*a^2*D*L)/(5*(-a+h)^4) - (3*a^4*D*L)/(h^2*(-a+h)^4) + \\
& (12*a^3*D*L)/(-a+h)^4 + (74*a*D*h^3)/(5*(-a+h)^4) - \\
& (31*D*h^2*L)/(5*(-a+h)^4) + (6*D*h^3*L)/(5*a*(-a+h)^4) - \\
& (a^4*D*mu*Pi^2)/(10*(-a+h)^4*L) + \\
& (7*a^3*D*h*mu*Pi^2)/(15*(-a+h)^4*L) - \\
& (61*a^2*D*h^2*mu*Pi^2)/(70*(-a+h)^4*L) + \\
& (4*a*D*h^3*mu*Pi^2)/(5*(-a+h)^4*L) - \\
& (37*D*h^4*mu*Pi^2)/(105*(-a+h)^4*L) + \\
& (2*D*h^5*mu*Pi^2)/(35*a*(-a+h)^4*L) + \\
& (13*a^4*D*h^2*Pi^4)/(840*(-a+h)^4*L^3) - \\
& (a^3*D*h^3*Pi^4)/(15*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (113*a^2*D*h^4*Pi^4)/(1008*(-a+h)^4*L^3) - \\
& (29*a*D*h^5*Pi^4)/(315*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (187*D*h^6*Pi^4)/(5040*(-a+h)^4*L^3) - \\
& (D*h^7*Pi^4)/(168*a*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (13*a^4*d^2*h^2*M*Pi^2*w)/(840*(-a+h)^4*I*x*L) - \\
& (a^4*h^3*M*Pi^2*w)/(120*(-a+h)^4*I*x*L) - \\
& (a^3*d^2*h^3*M*Pi^2*w)/(15*(-a+h)^4*I*x*L) + \\
& (37*a^3*h^4*M*Pi^2*w)/(1008*(-a+h)^4*I*x*L) + \\
& (113*a^2*d^2*h^4*M*Pi^2*w)/(1008*(-a+h)^4*I*x*L) - \\
& (4*a^2*h^5*M*Pi^2*w)/(63*(-a+h)^4*I*x*L) - \\
& (29*a*d^2*h^5*M*Pi^2*w)/(315*(-a+h)^4*I*x*L) + \\
& (17*a^2*h^6*M*Pi^2*w)/(315*(-a+h)^4*I*x*L) + \\
& (187*d^2*h^6*M*Pi^2*w)/(5040*(-a+h)^4*I*x*L) - \\
& (19*h^7*M*Pi^2*w)/(840*(-a+h)^4*I*x*L) - \\
& (d^2*h^7*M*Pi^2*w)/(168*a*(-a+h)^4*I*x*L) + \\
& (19*h^8*M*Pi^2*w)/(5040*a*(-a+h)^4*I*x*L) - \\
& (a^4*G*Pi^2*w^3)/(60*(-a+h)^4*L) + \\
& (7*a^3*G*h*Pi^2*w^3)/(90*(-a+h)^4*L) - \\
& (61*a^2*G*h^2*Pi^2*w^3)/(420*(-a+h)^4*L) + \\
& (2*a*G*h^3*Pi^2*w^3)/(15*(-a+h)^4*L) - \\
& (37*G*h^4*Pi^2*w^3)/(630*(-a+h)^4*L) + \\
& (G*h^5*Pi^2*w^3)/(105*a*(-a+h)^4*L)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M22 = & (-144*a*D*L)/(5*(-a+h)^4) + (6*a^4*D*L)/(h^3*(-a+h)^4) - \\
& (24*a^3*D*L)/(h^2*(-a+h)^4) + (188*a^2*D*L)/(5*h*(-a+h)^4) + \\
& (48*D*h^2*L)/(5*(-a+h)^4) + (8*D*h^2*L)/(5*a*(-a+h)^4) - \\
& (12*D*h^3*L)/(5*a^2*(-a+h)^4) + (2*D*h^5*L)/(5*a^4*(-a+h)^4) - \\
& (24*a^3*D*mu*Pi^2)/(5*(-a+h)^4*L) + \\
& (6*a^4*D*mu*Pi^2)/(5*h*(-a+h)^4*L) + \\
& (764*a^2*D*h*mu*Pi^2)/(105*(-a+h)^4*L) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (176*a*D*h^2*mu*Pi^2)/(35*(-a+h)^4*L) + \\
& (48*D*h^3*mu*Pi^2)/(35*(-a+h)^4*L) + \\
& (8*D*h^4*mu*Pi^2)/(105*a*(-a+h)^4*L) - \\
& (4*D*h^5*mu*Pi^2)/(35*a^2*(-a+h)^4*L) + \\
& (2*D*h^7*mu*Pi^2)/(105*a^4*(-a+h)^4*L) + \\
& (13*a^4*D*h*Pi^4)/(70*(-a+h)^4*L^3) - \\
& (163*a^3*D*h^2*Pi^4)/(210*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (311*a^2*D*h^3*Pi^4)/(252*(-a+h)^4*L^3) - \\
& (31*a*D*h^4*Pi^4)/(35*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (19*D*h^5*Pi^4)/(84*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (23*D*h^6*Pi^4)/(630*a*(-a+h)^4*L^3) - \\
& (3*D*h^7*Pi^4)/(140*a^2*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (D*h^9*Pi^4)/(1260*a^4*(-a+h)^4*L^3) + (E*Iy2*Pi^4)/(2*L^3) + \\
& (b2*d2*M*Pi^2*t2)/(2*Ix*L) + (13*a^4*d2*h*M*Pi^2*w)/(70*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (3*a^4*h^2*M*Pi^2*w)/(70*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (163*a^3*d2*h^2*M*Pi^2*w)/(210*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (233*a^3*h^3*M*Pi^2*w)/(1260*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (311*a^2*d2*h^3*M*Pi^2*w)/(252*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (257*a^2*h^4*M*Pi^2*w)/(840*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (31*a*d2*h^4*M*Pi^2*w)/(35*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (29*a*h^5*M*Pi^2*w)/(126*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (19*d2*h^5*M*Pi^2*w)/(84*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (151*h^6*M*Pi^2*w)/(2520*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (23*d2*h^6*M*Pi^2*w)/(630*a*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (19*h^7*M*Pi^2*w)/(1260*a^2*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (3*d2*h^7*M*Pi^2*w)/(140*a^2*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (23*h^8*M*Pi^2*w)/(2520*a^2*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (d2*h^9*M*Pi^2*w)/(1260*a^4*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (h^10*M*Pi^2*w)/(2520*a^4*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (4*a^3*G*Pi^2*w^3)/(5*(-a+h)^4*L) + \\
& (a^4*G*Pi^2*w^3)/(5*h*(-a+h)^4*L) + \\
& (382*a^2*G*h*Pi^2*w^3)/(315*(-a+h)^4*L) - \\
& (88*a*G*h^2*Pi^2*w^3)/(105*(-a+h)^4*L) + \\
& (8*G*h^3*Pi^2*w^3)/(35*(-a+h)^4*L) + \\
& (4*G*h^4*Pi^2*w^3)/(315*a*(-a+h)^4*L) - \\
& (2*G*h^5*Pi^2*w^3)/(105*a^2*(-a+h)^4*L) + \\
& (G*h^7*Pi^2*w^3)/(315*a^4*(-a+h)^4*L)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M23 = & (94*a^2*D*L)/(5*(-a+h)^4) + (3*a^4*D*L)/(h^2*(-a+h)^4) - \\
& (12*a^3*D*L)/(h*(-a+h)^4) - (14*a*D*h*L)/(-a+h)^4 + \\
& (21*D*h^2*L)/(5*(-a+h)^4) + (2*D*h^3*L)/(5*a*(-a+h)^4) - \\
& (2*D*h^4*L)/(5*a^2*(-a+h)^4) + (a^4*D*mu*Pi^2)/(10*(-a+h)^4*L) - \\
& (a^3*D*h*mu*Pi^2)/(3*(-a+h)^4*L) + \\
& (17*a^2*D*h^2*mu*Pi^2)/(42*(-a+h)^4*L) - \\
& (8*a*D*h^3*mu*Pi^2)/(35*(-a+h)^4*L) + \\
& (19*D*h^4*mu*Pi^2)/(210*(-a+h)^4*L) - \\
& (D*h^5*mu*Pi^2)/(21*a*(-a+h)^4*L) + \\
& (D*h^6*mu*Pi^2)/(70*a^2*(-a+h)^4*L) - \\
& (13*a^4*D*h^2*Pi^4)/(840*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (2*a^3*D*h^3*Pi^4)/(35*(-a+h)^4*L^3) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (397a^2D^2h^4P^4)/(5040*(-a+h)^4L^3) + \\
& (17a^6D^2h^5P^4)/(360*(-a+h)^4L^3) - \\
& (D^2h^6P^4)/(120*(-a+h)^4L^3) - (D^2h^7P^4)/(360*a*(-a+h)^4L^3) + \\
& (D^2h^8P^4)/(1008*a^2*(-a+h)^4L^3) - \\
& (13a^4*d2^2h^2M^2P^2w)/(840*(-a+h)^4*L) + \\
& (a^4h^3*M^2P^2w)/(140*(-a+h)^4*L) + \\
& (2a^3*d2^2h^3M^2P^2w)/(35*(-a+h)^4*L) - \\
& (137a^3h^4M^2P^2w)/(5040*(-a+h)^4*L) - \\
& (397a^2*d2^2h^4M^2P^2w)/(5040*(-a+h)^4*L) + \\
& (7a^2h^5M^2P^2w)/(180*(-a+h)^4*L) + \\
& (17a^4d2^2h^5M^2P^2w)/(360*(-a+h)^4*L) - \\
& (41a^6h^6M^2P^2w)/(1680*(-a+h)^4*L) - \\
& (d2^2h^6M^2P^2w)/(120*(-a+h)^4*L) + \\
& (23h^7M^2P^2w)/(5040*(-a+h)^4*L) - \\
& (d2^2h^7M^2P^2w)/(360*a*(-a+h)^4*L) + \\
& (h^8M^2P^2w)/(630*a*(-a+h)^4*L) + \\
& (d2^2h^8M^2P^2w)/(1008*a^2*(-a+h)^4*L) - \\
& (h^9M^2P^2w)/(1680*a^2*(-a+h)^4*L) + \\
& (a^4G^2P^2w^3)/(60*(-a+h)^4L) - \\
& (a^3G^2h^2P^2w^3)/(18*(-a+h)^4L) + \\
& (17a^2G^2h^2P^2w^3)/(252*(-a+h)^4L) - \\
& (4a^2G^2h^3P^2w^3)/(105*(-a+h)^4L) + \\
& (19G^2h^4P^2w^3)/(1260*(-a+h)^4L) - \\
& (G^2h^5P^2w^3)/(126*a*(-a+h)^4L) + \\
& (G^2h^6P^2w^3)/(420*a^2*(-a+h)^4L)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M24 = & (94a^2D^2L)/(5*a + h)^4 + (3a^4D^2L)/(h^2*(-a+h)^4) - \\
& (12a^3D^2L)/(h*(-a+h)^4) - (74a^6D^2h^2L)/(5*(-a+h)^4) + \\
& (31D^2h^2L)/(5*(-a+h)^4) - (4D^2h^3L)/(5*a*(-a+h)^4) - \\
& (4D^2h^4L)/(5*a^2*(-a+h)^4) + (2D^2h^5L)/(5*a^3*(-a+h)^4) + \\
& (3a^4D^2mu^2P^2)/(5*(-a+h)^4L) - \\
& (37a^3D^2h^2mu^2P^2)/(15*(-a+h)^4L) + \\
& (271a^2D^2h^2mu^2P^2)/(70*(-a+h)^4L) - \\
& (14a^2D^2h^3mu^2P^2)/(5*(-a+h)^4L) + \\
& (86D^2h^4mu^2P^2)/(105*(-a+h)^4L) + \\
& (D^2h^5mu^2P^2)/(35*a*(-a+h)^4L) - \\
& (D^2h^6mu^2P^2)/(14*a^2*(-a+h)^4L) + \\
& (2D^2h^7mu^2P^2)/(105*a^3*(-a+h)^4L) + \\
& (11a^4D^2h^2P^4)/(420*(-a+h)^4L^3) - \\
& (7a^3D^2h^3P^4)/(60*(-a+h)^4L^3) + \\
& (1031a^2D^2h^4P^4)/(5040*(-a+h)^4L^3) - \\
& (11a^2D^2h^5P^4)/(63*(-a+h)^4L^3) + \\
& (5D^2h^6P^4)/(72*(-a+h)^4L^3) - \\
& (2D^2h^7P^4)/(315*a*(-a+h)^4L^3) - \\
& (17D^2h^8P^4)/(5040*a^2*(-a+h)^4L^3) + \\
& (D^2h^9P^4)/(1260*a^3*(-a+h)^4L^3) + \\
& (11a^4d2^2h^2M^2P^2w)/(420*(-a+h)^4*L) - \\
& (a^4h^3M^2P^2w)/(120*(-a+h)^4*L) - \\
& (7a^3d2^2h^3M^2P^2w)/(60*(-a+h)^4*L) + \\
& (193a^3h^4M^2P^2w)/(5040*(-a+h)^4*L) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1031*a^2*d2*h^4*M*Pi^2*w)/(5040*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (22*a^2*h^5*M*Pi^2*w)/(315*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (11*a*d2*h^5*M*Pi^2*w)/(63*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (79*a*h^6*M*Pi^2*w)/(1260*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (5*d2*h^6*M*Pi^2*w)/(72*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (67*h^7*M*Pi^2*w)/(2520*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (2*d2*h^7*M*Pi^2*w)/(315*a*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (13*h^8*M*Pi^2*w)/(5040*a*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (17*d2*h^8*M*Pi^2*w)/(5040*a^2*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (h^9*M*Pi^2*w)/(630*a^2*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (d2*h^9*M*Pi^2*w)/(1260*a^3*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (h^10*M*Pi^2*w)/(2520*a^3*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (a^4*G*Pi^2*w^3)/(60*(-a+h)^4*L) - \\
& (7*a^3*G*h*Pi^2*w^3)/(90*(-a+h)^4*L) + \\
& (61*a^2*G*h^2*Pi^2*w^3)/(420*(-a+h)^4*L) - \\
& (2*a*G*h^3*Pi^2*w^3)/(15*(-a+h)^4*L) + \\
& (67*G*h^4*Pi^2*w^3)/(1260*(-a+h)^4*L) + \\
& (G*h^5*Pi^2*w^3)/(210*a*(-a+h)^4*L) - \\
& (G*h^6*Pi^2*w^3)/(84*a^2*(-a+h)^4*L) + \\
& (G*h^7*Pi^2*w^3)/(315*a^3*(-a+h)^4*L)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M33 = & (-8*a^3*D*L)/(-a+h)^4 + (2*a^4*D*L)/(h*(-a+h)^4) + \\
& (62*a^2*D*h*L)/(5*(-a+h)^4) - (44*a*D*h^2*L)/(5*(-a+h)^4) + \\
& (12*D*h^3*L)/(5*(-a+h)^4) + (G*J1*Pi^2)/(2*L) + \\
& (2*a^4*D*h*mu*Pi^2)/(15*(-a+h)^4*L) - \\
& (7*a^3*D*h^2*mu*Pi^2)/(15*(-a+h)^4*L) + \\
& (13*a^2*D*h^3*mu*Pi^2)/(21*(-a+h)^4*L) - \\
& (13*a*D*h^4*mu*Pi^2)/(35*(-a+h)^4*L) + \\
& (3*D*h^5*mu*Pi^2)/(35*(-a+h)^4*L) + \\
& (a^4*D*h^3*Pi^4)/(210*(-a+h)^4*L^3) - \\
& (13*a^3*D*h^4*Pi^4)/(840*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (47*a^2*D*h^5*Pi^4)/(2520*(-a+h)^4*L^3) - \\
& (5*a*D*h^6*Pi^4)/(504*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (D*h^7*Pi^4)/(504*(-a+h)^4*L^3) - (b1^3*d1*M*Pi^2*t1)/(24*Ix*L) + \\
& (a^4*d2*h^3*M*Pi^2*w)/(210*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (a^4*h^4*M*Pi^2*w)/(336*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (13*a^3*d2*h^4*M*Pi^2*w)/(840*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (5*a^3*h^5*M*Pi^2*w)/(504*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (47*a^2*d2*h^5*M*Pi^2*w)/(2520*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (31*a^2*h^6*M*Pi^2*w)/(2520*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (5*a*d2*h^6*M*Pi^2*w)/(504*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (17*a*h^7*M*Pi^2*w)/(2520*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (d2*h^7*M*Pi^2*w)/(504*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (h^8*M*Pi^2*w)/(720*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (a^4*G*h*Pi^2*w^3)/(45*(-a+h)^4*L) - \\
& (7*a^3*G*h^2*Pi^2*w^3)/(90*(-a+h)^4*L) + \\
& (13*a^2*G*h^3*Pi^2*w^3)/(126*(-a+h)^4*L) - \\
& (13*a*G*h^4*Pi^2*w^3)/(210*(-a+h)^4*L) + \\
& (G*h^5*Pi^2*w^3)/(70*(-a+h)^4*L)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M34 = & (-4*a^3*D*L)/(-a+h)^4 + (a^4*D*L)/(h*(-a+h)^4) + \\
& (32*a^2*D*h*L)/(5*(-a+h)^4) - (26*a*D*h^2*L)/(5*(-a+h)^4) + \\
& (11*D*h^3*L)/(5*(-a+h)^4) - (2*D*h^4*L)/(5*a*(-a+h)^4) - \\
& (a^4*D*h*mu*Pi^2)/(30*(-a+h)^4*L) + \\
& (2*a^3*D*h^2*mu*Pi^2)/(15*(-a+h)^4*L) - \\
& (3*a^2*D*h^3*mu*Pi^2)/(14*(-a+h)^4*L) + \\
& (37*a*D*h^4*mu*Pi^2)/(210*(-a+h)^4*L) - \\
& (8*D*h^5*mu*Pi^2)/(105*(-a+h)^4*L) + \\
& (D*h^6*mu*Pi^2)/(70*a*(-a+h)^4*L) - \\
& (a^4*D*h^3*Pi^4)/(280*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (a^3*D*h^4*Pi^4)/(70*(-a+h)^4*L^3) - \\
& (113*a^2*D*h^5*Pi^4)/(5040*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (29*a*D*h^6*Pi^4)/(1680*(-a+h)^4*L^3) - \\
& (11*D*h^7*Pi^4)/(1680*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (D*h^8*Pi^4)/(1008*a*(-a+h)^4*L^3) - \\
& (a^4*d2*h^3*M*Pi^2*w)/(280*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (a^4*h^4*M*Pi^2*w)/(560*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (a^3*d2*h^4*M*Pi^2*w)/(70*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (37*a^3*h^5*M*Pi^2*w)/(5040*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (113*a^2*d2*h^5*M*Pi^2*w)/(5040*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (a^2*h^6*M*Pi^2*w)/(84*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (29*a*d2*h^6*M*Pi^2*w)/(1680*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (a*h^7*M*Pi^2*w)/(105*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (11*d2*h^7*M*Pi^2*w)/(1680*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (19*h^8*M*Pi^2*w)/(5040*(-a+h)^4*Ix*L) + \\
& (d2*h^8*M*Pi^2*w)/(1008*a*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (h^9*M*Pi^2*w)/(1680*a*(-a+h)^4*Ix*L) - \\
& (a^4*G*h*Pi^2*w^3)/(180*(-a+h)^4*L) + \\
& (a^3*G*h^2*Pi^2*w^3)/(45*(-a+h)^4*L) - \\
& (a^2*G*h^3*Pi^2*w^3)/(28*(-a+h)^4*L) + \\
& (37*a*G*h^4*Pi^2*w^3)/(1260*(-a+h)^4*L) - \\
& (4*G*h^5*Pi^2*w^3)/(315*(-a+h)^4*L) + \\
& (G*h^6*Pi^2*w^3)/(420*a*(-a+h)^4*L)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M44 = & (-8*a^3*D*L)/(-a+h)^4 + (2*a^4*D*L)/(h*(-a+h)^4) + \\
& (62*a^2*D*h*L)/(5*(-a+h)^4) - (48*a*D*h^2*L)/(5*(-a+h)^4) + \\
& (22*D*h^3*L)/(5*(-a+h)^4) - (8*D*h^4*L)/(5*a*(-a+h)^4) + \\
& (2*D*h^5*L)/(5*a^2*(-a+h)^4) + (G*J2*Pi^2)/(2*L) + \\
& (2*a^4*D*h*mu*Pi^2)/(15*(-a+h)^4*L) - \\
& (3*a^3*D*h^2*mu*Pi^2)/(5*(-a+h)^4*L) + \\
& (38*a^2*D*h^3*mu*Pi^2)/(35*(-a+h)^4*L) - \\
& (106*a*D*h^4*mu*Pi^2)/(105*(-a+h)^4*L) + \\
& (18*D*h^5*mu*Pi^2)/(35*(-a+h)^4*L) - \\
& (D*h^6*mu*Pi^2)/(7*a*(-a+h)^4*L) + \\
& (2*D*h^7*mu*Pi^2)/(105*a^2*(-a+h)^4*L) + \\
& (a^4*D*h^3*Pi^4)/(210*(-a+h)^4*L^3) - \\
& (19*a^3*D*h^4*Pi^4)/(840*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (11*a^2*D*h^5*Pi^4)/(252*(-a+h)^4*L^3) - \\
& (11*a*D*h^6*Pi^4)/(252*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (D*h^7*Pi^4)/(42*(-a+h)^4*L^3) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (17*D*h^8*Pi^4)/(2520*a*(-a+h)^4*L^3) + \\
& (D*h^9*Pi^4)/(1260*a^2*(-a+h)^4*L^3) + (b^2*d^2*M*Pi^2*t_2)/(24*I*x*L) + \\
& (a^4*d^2*h^3*M*Pi^2*w)/(210*(-a+h)^4*I*x*L) - \\
& (a^4*h^4*M*Pi^2*w)/(560*(-a+h)^4*I*x*L) - \\
& (19*a^3*d^2*h^4*M*Pi^2*w)/(840*(-a+h)^4*I*x*L) + \\
& (11*a^3*h^5*M*Pi^2*w)/(1260*(-a+h)^4*I*x*L) + \\
& (11*a^2*d^2*h^5*M*Pi^2*w)/(252*(-a+h)^4*I*x*L) - \\
& (11*a^2*h^6*M*Pi^2*w)/(630*(-a+h)^4*I*x*L) - \\
& (11*a*d^2*h^6*M*Pi^2*w)/(252*(-a+h)^4*I*x*L) + \\
& (23*a*h^7*M*Pi^2*w)/(1260*(-a+h)^4*I*x*L) + \\
& (d^2*h^7*M*Pi^2*w)/(42*(-a+h)^4*I*x*L) - \\
& (53*h^8*M*Pi^2*w)/(5040*(-a+h)^4*I*x*L) - \\
& (17*d^2*h^8*M*Pi^2*w)/(2520*a*(-a+h)^4*I*x*L) + \\
& (h^9*M*Pi^2*w)/(315*a*(-a+h)^4*I*x*L) + \\
& (d^2*h^9*M*Pi^2*w)/(1260*a^2*(-a+h)^4*I*x*L) - \\
& (h^10*M*Pi^2*w)/(2520*a^2*(-a+h)^4*I*x*L) + \\
& (a^4*G*h*Pi^2*w^3)/(45*(-a+h)^4*L) - \\
& (a^3*G*h^2*Pi^2*w^3)/(10*(-a+h)^4*L) + \\
& (19*a^2*G*h^3*Pi^2*w^3)/(105*(-a+h)^4*L) - \\
& (53*a*G*h^4*Pi^2*w^3)/(315*(-a+h)^4*L) + \\
& (3*G*h^5*Pi^2*w^3)/(35*(-a+h)^4*L) - \\
& (G*h^6*Pi^2*w^3)/(42*a*(-a+h)^4*L) + \\
& (G*h^7*Pi^2*w^3)/(315*a^2*(-a+h)^4*L)
\end{aligned}$$

ANNEXE E

FICHER D'ENTRÉE DE MATHEMATICA

Le texte qui suit est le fichier d'entrée de Mathematica qui résout le problème discuté à la section 7.1. Les unités utilisées dans ce fichier sont les kN et les mm. La poutre utilisée pour ce fichier est la poutre du pont-type, soit une poutre de portée $L_1=25200$, une âme de 2645×16 et des semelles de 450×55 . L'axe de rotation forcé est à $a=h/3$ et le ressort rotationnel est de rigidité $K_r=5000 \text{ kN} \cdot \text{mm/mm}$. La poutre est munie de raidisseurs de 100×8 espacés de 1575, ce qui donne une épaisseur d'âme équivalente de 20,9. Les propriétés du matériau sont $E=200000 \text{ MPa}$, $G=77000 \text{ MPa}$ et $\nu=0,3$. Ce fichier d'entrée calcule le moment de déversement pour le premier mode seulement ($m=1$). Seuls les caractères en italique constituent le fichier d'entrée. Le reste du texte sert à la compréhension des étapes effectuées et ne doit pas être inclus dans l'entrée donnée à Mathematica.

Entrée des propriétés géométriques

```

kr=0;
a=h 3;
m=1;
b1=450;
t1=55;
b2=450;
t2=55;
h=2645;
w=16;
weq=20.9;
l=25200;
e=200000;
g=77000;
mu=0.3;

```

Calcul de certaines propriétés géométriques

```

d=e*w^3 12 (1-mu^2);
deq=e*weq^3 12 (1-mu^2);
r=kr*12 e weq^3;
cg=(b1*t1*h-h*w*h 2) (b1*t1-b2*t2-h*w);
d1=h-cg;
d2=cg;
i1=t1*b1^3 12;
i2=t2*b2^3 12;
j1=b1*t1^3 3;
j2=b2*t2^3 3;
i=w*h^3 12-b1*t1^3 12-b2*t2^3 12-
w*h*(h 2-d2)^2-b1*t1*d1^2-b2*t2*d2^2;

```

Résolution du polynôme décrivant la déformée de l'âme

```

X1={{1,0,0,0,0,0,0,0},{0,1,0,0,0,0,0,0},{1,a,a^2,a^3,0,0,0,0},
{0,0,0,0,1,a,a^2,a^3},{0,1,2a,3a^2,0,-1,-2a,-3a^2},
{0,-r,2-2r*a,6a-3r*a^2,0,0,-2,-6a},{0,0,0,0,1,h,h^2,h^3},{0,0,0,0,0,1,2h,3h^2}};
B1={u2,beta2,0,0,0,0,u1,beta1};
sol=Expand[LinearSolve[X1,B1]];
u=sol1-sol2*y-sol3*y^2-sol4*y^3;
v=sol5-sol6*y-sol7*y^2-sol8*y^3;
beta0=sol2-2*sol3*a-3*sol4*a^2;

```

Définition des degrés de liberté sous la forme de fonctions sinusoïdales d'amplitude a_1 , a_2 , a_3 et a_4 .

```

u1=a1;
u2=a2;
beta1=a3;
beta2=a4;
beta1p=a3*Pi l*m;
beta2p=a4*Pi l*m;
u1p=a1*Pi l*m;
u2p=a2*Pi l*m;
u1pp=a1*(-l)*Pi^2 l^2*m^2;
u2pp=a2*(-l)*Pi^2 l^2*m^2;

```

Calcul des différentes dérivées pour le polynôme inférieur

```

dudy=D[u,y];
dudz=u*Pi l*m;
dudy2=D[dudy,y];
dudz2=u*(-l)*Pi^2 l^2*m^2;
dudydz=dudy*Pi l*m;

```

Calcul des différentes dérivées pour le polynôme supérieur

```

dvdy=D[v,y];
dvdz=v*Pi l*m;
dvdy2=D[dvdy,y];
dvdz2=v*(-l)*Pi^2 l^2*m^2;
dvdydz=dvdy*Pi l*m;

```

Intégrations des différentes parties de l'énergie potentielle totale

```

int1a=Integrate[dudy^2,{y,0,a}];
int1b=Integrate[dvdy^2,{y,a,h}];
int1=int1a-int1b;
int2a=Integrate[dudz^2,{y,0,a}];
int2b=Integrate[dvdz^2,{y,a,h}];
int2=int2a-int2b;
int3a=Integrate[(dudy*dudz),{y,0,a}];
int3b=Integrate[(dvdy*dvdz),{y,a,h}];
int3=int3a-int3b;
int4a=Integrate[dudydz^2,{y,0,a}];
int4b=Integrate[dvdydz^2,{y,a,h}];
int4=int4a-int4b;
int5a=Integrate[((y-d2)*dudz^2),{y,0,a}];
int5b=Integrate[((y-d2)*dvdz^2),{y,a,h}];
int5=int5a-int5b;

```

Intégration des fonctions sinusoidales

```

en1=beta1p^2*l^2;
en2=beta2p^2*l^2;
en3=u1pp^2*l^2;
en4=u2pp^2*l^2;
en5=int1*l^2;
en6=int2*l^2;
en7=int3*l^2;
en8=int4*l^2;
en9=(u1p^2*b1-beta1p^2*b1^3/2)*l^2;
en10=(u2p^2*b2-beta2p^2*b2^3/2)*l^2;
en11=int5*l^2;
en12=beta0^2*l^2;

```

Assemblage des différentes parties de l'énergie potentielle totale

```

energie=l^2*(g*j1*en1-g*j2*en2-e*i1*en3-e*i2*en4-
deq*en5-d*en6-2*d*mu*en7-g*w^3/3*en8-
(-1)*md*d1*t1/i*en9-md*d2*t2/i*en10-
(-1)*w*md/i*en11+
kr*en12);

```

Injection dans l'énergie potentielle totale du polynôme résolu précédemment

```
sol1=sol[[1]];
sol2=sol[[2]];
sol3=sol[[3]];
sol4=sol[[4]];
sol5=sol[[5]];
sol6=sol[[6]];
sol7=sol[[7]];
sol8=sol[[8]];
```

Dérivée partielle de l'énergie potentielle totale pour chaque degré de liberté

```
deda1=Expand[D[energie,a1]];
deda2=Expand[D[energie,a2]];
deda3=Expand[D[energie,a3]];
deda4=Expand[D[energie,a4]];
```

Extraction de la matrice des dérivées partielles

```
m11=Coefficient[deda1,a1];
m12=Coefficient[deda1,a2];
m13=Coefficient[deda1,a3];
m14=Coefficient[deda1,a4];
m22=Coefficient[deda2,a2];
m23=Coefficient[deda2,a3];
m24=Coefficient[deda2,a4];
m33=Coefficient[deda3,a3];
m34=Coefficient[deda3,a4];
m44=Coefficient[deda4,a4];
```

Résolution du déterminant nul

```
matrice={{m11,m12,m13,m14},{m12,m22,m23,m24},
{m13,m23,m33,m34},{m14,m24,m34,m44}};
NSolve[Det[matrice]==0,md]
```

Les résultats obtenus vont être sous la forme suivante :

```
Out[118]= {{md -> -6.86362 1012 }, {md -> -5.26439 1010 }, {md -> 8.6088 109 },
> {md -> 2.27675 1012 }}
```

Le moment de déversement de la poutre est la plus petite racine positive et sera donc de 8609 kN*m.






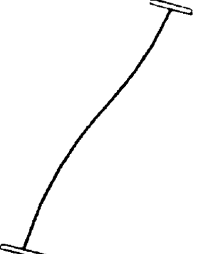

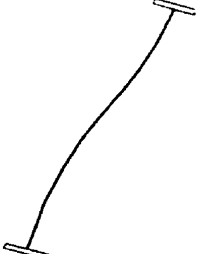
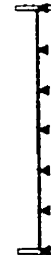
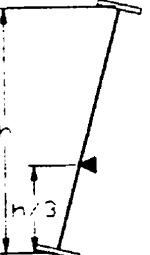
Le lecteur notera que certaines lignes et opérations auraient pu être effectuées de façon plus directe et plus automatique pour en résulter en un fichier d'entrée plus court. Le fichier présenté utilise plutôt certains détours, comme le calcul préalable de l'intégration des fonctions sinusoidales, de manière à diminuer le temps de calcul.

ANNEXE F

MOMENTS DE DÉVERSEMENT OBTENUS

Les résultats présentés dans cette annexe ne sont qu'une récapitulation de quelques moments de déversement obtenus de l'étude paramétrique du chapitre 5 et du développement de la méthode énergétique au chapitre 6 auxquels certains résultats obtenus au chapitre 4 et à l'annexe B ont été ajoutés.

Ces résultats s'appliquent à la poutre du pont-type dont les dimensions des semelles sont de 450 x 55 mm et dont l'âme est de 2590 x 16 mm. La portée de la poutre est de 25200 mm. Aucun raidisseur transversal ni longitudinal n'est ajouté à la poutre dans les résultats présentés ici. Il n'y a pas non plus de ressort torsionnel ajouté au point de rotation fixe. Les résultats obtenus par éléments finis sont ceux obtenus du logiciel ADINA.

Méthode de calcul	Retenues aux extrémités	Retenues sur la portée	Type de chargement	M_{cr} (kN*m)
Approche classique (Timoshenko)			Moment uniforme	4742
Éléments finis distorsion empêchée			Moment uniforme	4583
Approche énergétique distorsion permise (section 6.3)			Moment uniforme	4560
Éléments finis distorsion permise			Moment uniforme	4342
Approche énergétique distorsion empêchée (section 6.2)			Moment uniforme	10400


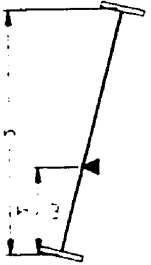

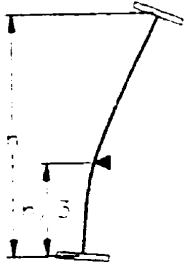

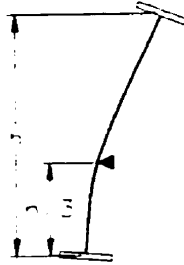
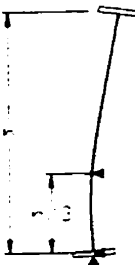
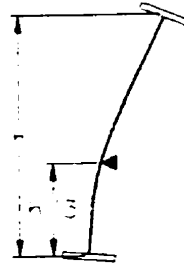
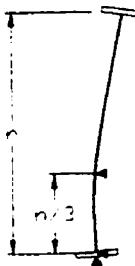
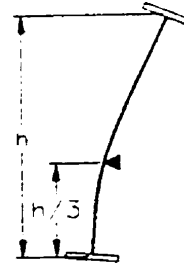
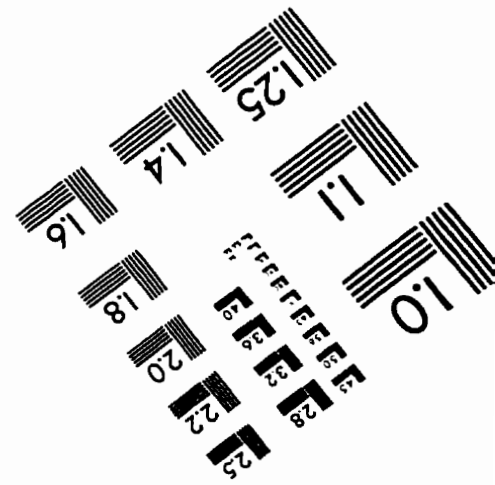
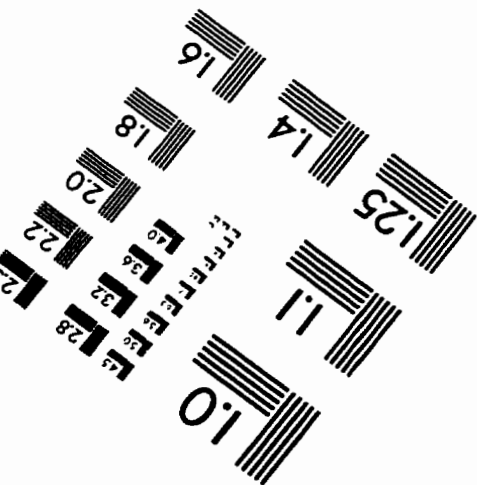
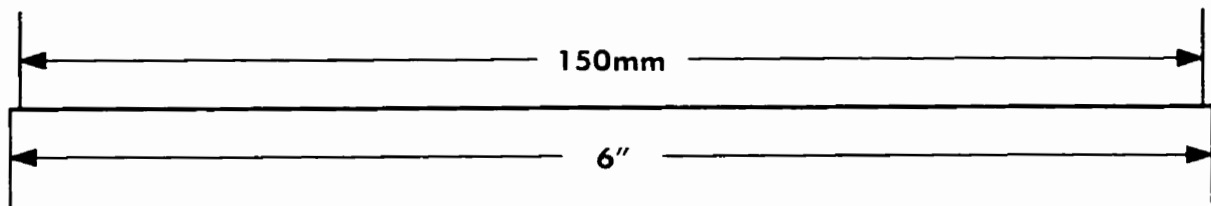
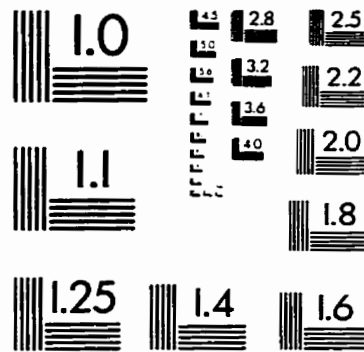
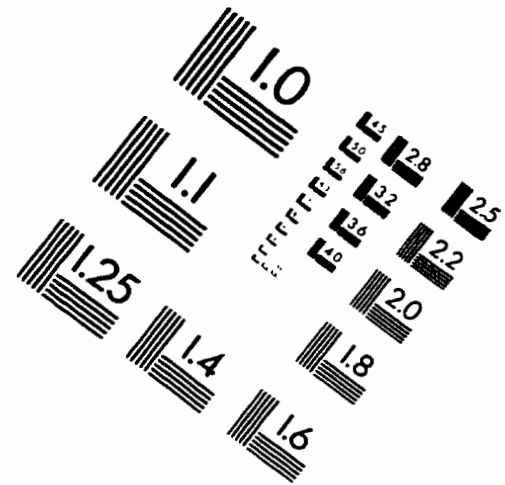
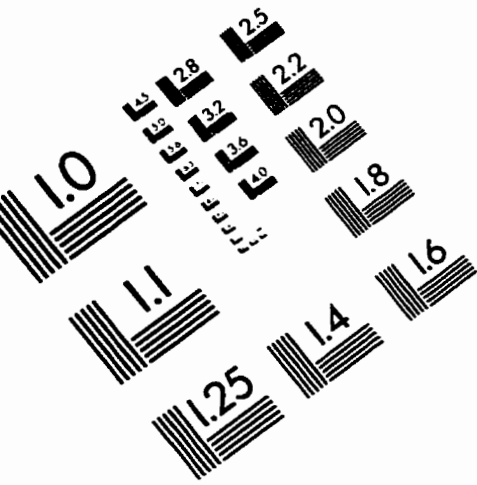
Méthode de calcul	Retenues aux extrémités	Retenues sur la portée	Type de chargement	M_{cr} (kN*m)
Éléments finis distorsion empêchée			Moment uniforme	8500
Approche énergétique distorsion permise (section 6.2)			Moment uniforme	7700
Éléments finis distorsion permise			Moment uniforme	6720
Éléments finis distorsion permise			Moment uniforme	4710
Éléments finis distorsion permise			Charge uniforme	5120

IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)



APPLIED IMAGE, Inc.
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved